ฟังก์ชันต่อเนื่องและผลที่ตามมา

โดย

นางสาวอรวรรณ์ กลั่นบุศย์

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

ฟังก์ชันต่อเนื่องและผลที่ตามมา

โดย

นางสาวอรวรรณ์ กลั่นบุศย์

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

CONTINUOUS FUNCTIONS AND CONSEQUENCES

By

Orawan Klunboot

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2008

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง " ฟังก์ชันต่อเนื่องและผลที่ตามมา " เสนอโดย นางสาวอรวรรณ์ กลั่นบุศย์ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

……..

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่.........เดือน................... พ.ศ..........

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

รองศาสตราจารย์วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.จิตติ รักบุตร)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์วารี เกรอต)

............/......................../..............

48308307 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : ลิมิต / ความต่อเนื่อง / ฟังก์ชัน

อรวรรณ์ กลั่นบุศย์ : ฟังก์ชันต่อเนื่องและผลที่ตามมา. อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : รศ.วารี เกรอต. 59 หน้า.

ในการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ เราจะศึกษาฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งเป็นพื้นฐานหนึ่งที่สำคัญในแคลคูลัส และเราศึกษาสมบัติต่างๆของฟังก์ชันต่อเนื่อง รวมทั้งสมบัติที่เกี่ยวข้องกับลำดับ นอกจากนี้เราศึกษาทฤษฎีบทที่สำคัญในแคลคูลัส เช่น ทฤษฎีบทค่ากลาง ทฤษฎีบทค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย ซึ่งทฤษฎีบทสำคัญเหล่านี้ ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างขว้างขวางในคณิตศาสตร์และสาขาวิชาต่างๆ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2551
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ....

48308307 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY
KEY WORDS : LIMIT / CONTINOUS / FUNCTION
ORAWAN KLUNBOOT : CONTINUOUS FUNCTIONS AND CONSEQUENCE.
AN INDEPENDENT STUDY ADVISOR : ASSOC.PROF.WAREE KAROT. 59 pp.

In this an independent study we study continuous functions which are important basics in calculus. We also study their properties including those related to sequences. Furthermore we study main theorems in calculus such as Intermediate Value Theorem ,Max-Min Theorem and Mean Value Theorem which are consequences of continuity and these theorems have been widely applied to mathematics together with other fields

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2008
Student's signature ....
An Independent Study Advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระที่ให้คำปรึกษา แนะนำ แก้ไขในส่วนที่บกพร่องต่างๆและช่วยเติมเต็มความรู้ จนทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ความรู้ จนทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จได้ด้วยดี

ขอขอบคุณเพื่อนๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีสารสนเทศ ที่มีส่วนช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา และเป็นกำลังใจด้วยดี รวมทั้งกำลังใจจากเพื่อนๆร่วมงาน

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณพ่อ และแม่ ที่ให้การสนับสนุนการศึกษา และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา รวมทั้งกำลังใจจากญาติพี่น้อง ในการศึกษาจนทำให้ประสบความสำเร็จได้ในวันนี้

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

(INTRODUCTION)

แคลคูลัสเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มีการประยุกต์อย่างกว้างขวาง ทั้งในคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น พื้นฐานหนึ่งที่สำคัญในแคลคูลัส ได้แก่ ฟังก์ชันต่อเนื่อง

ในการค้นคว้าอิสระเล่มนี้ เราจะเริ่มศึกษาบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันต่อเนื่อง พร้อมทั้ง การประยุกต์ของฟังก์ชันต่อเนื่องในแคลคูลัส ซึ่งจะทำให้เกิดทฤษฎีบทที่สำคัญต่างๆ ทฤษฎีบทเหล่านี้ได้นำไปประยุกต์ใช้ในคณิตศาสตร์หรือสาขาวิชาอื่นๆ รายละเอียดของแต่ละบท มีดังต่อไปนี้

บทที่ 2 : กล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานของลำดับและจำนวนจริง ซึ่งเป็นพื้นฐานในการศึกษาฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทที่ 3 : ศึกษาแนวคิดของฟังก์ชันต่อเนื่อง และสมบัติที่เกี่ยวข้อง อันได้แก่ ลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่อง โทโพโลยีของจำนวนจริง และความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

บทที่ 4 : ศึกษาการประยุกต์ของฟังก์ชันต่อเนื่องในแคลคูลัส ซึ่งทำให้ได้ทฤษฎีบทที่สำคัญ เช่น ทฤษฎีบทค่ากลาง ทฤษฎีบทค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย เป็นต้น

บทที่ 2

ทฤษฎีบทพื้นฐาน

(BASIC THEOREMS)

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆ ที่ใช้ในการศึกษาฟังก์ชันต่อเนื่องโดยจะขอละการพิสูจน์ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [2] , [3] และ [4]

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ จะขอกำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้ดังต่อไปนี้

R แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

$D(f)$ แทนโดเมนของ f เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน

$A \subset B$ แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

บทนิยาม 2.1 : ให้ $A \subset R$ จะกล่าวว่า จำนวนจริง x เป็น **จุดลิมิต (limit point)** ของ A ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีสมาชิกของ A อยู่ในช่วง $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ เป็นจำนวนอนันต์

จากบทนิยามเราสรุปได้ว่า x เป็นจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\delta > 0$ จะได้ว่า ช่วง $(x-\delta, x+\delta) \cap (A - \{x\}) \neq \phi$ เราจะแทนเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ A ด้วย A'

ทฤษฎีบท 2.2 : ทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano - Weierstrass)

ทุกเซตอนันต์ซึ่งเป็นเซตมีขอบเขตจะมีจุดลิมิต

ทฤษฎีบท 2.3 : หลักอาร์คีมีดิส (Archimedean Principle)

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว มีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $na > b$ นั่นคือ ถ้าให้ $\varepsilon > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n , m ซึ่งสอดคล้อง $m > \varepsilon$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$

บทนิยาม 2.4 : ให้ $A \subset R$ และ $x \in R$

(1) ถ้ามี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $(x-\delta, x+\delta) \subset A$ แล้ว จะเรียก x ว่าเป็น **จุดภายในของ** A **(interior point of** A **)**

เรียกเซตของจุดภายในทั้งหมดของ A ว่า**อินทีเรีย (interior)** ของ A เขียนแทนด้วย $\operatorname{int}(A)$

(2) ถ้าสำหรับทุก $\delta > 0$ ช่วง $(x-\delta, x+\delta) \cap A \neq \phi$ และ $(x-\delta, x+\delta) \cap A^c \neq \phi$ จะเรียก x ว่าเป็น **จุดขอบ(boundary point)** ของ A

เรียกเซตของจุดขอบทั้งหมดของ A ว่า **ขอบ (boundary)** ของ A เขียนแทนด้วย $b(A)$

(3) เรียก x ว่า **จุดเอกเทศ(isolated point) ของ** A ถ้ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $(x-\delta, x+\delta) \cap A = \{x\}$

บทนิยาม 2.5 : ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลง (monotone increasing)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$

บทนิยาม 2.6 : ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้น (monotone decreasing)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \geq f(x_2)$

บทนิยาม 2.7 : ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้น (strictly monotone increasing)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

บทนิยาม 2.8 : ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนลดลง (strictly monotone decreasing)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

บทนิยาม 2.9 : ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทน (monotone functions)** ถ้า f เป็น ฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลงหรือเป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้น

บทนิยาม 2.10 : ขอบเขตบน (upper bound) ของเซต X ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง คือ จำนวนจริง u ซึ่งสอดคล้องว่า $x \leq u$ สำหรับทุก $x \in X$

บทนิยาม 2.11 : จำนวนจริง u เป็น **ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (least upper bound)** ของ เซต X ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง ถ้า u สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. u เป็นขอบเขตบนของ X
2. ถ้าจำนวนจริง b เป็นขอบเขตบนของ X แล้ว $b \geq u$

บทนิยาม 2.12 : ขอบเขตล่าง (lower bound) ของเซต X ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง คือ จำนวนจริง l ซึ่งสอดคล้องว่า $l \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$

บทนิยาม 2.13 : จำนวนจริง l เป็น **ขอบเขตล่างค่ามากสุด (greatest lower bound)** ของ เซต X ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง ถ้า l สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. l เป็นขอบเขตล่างของ X
2. ถ้าจำนวนจริง a เป็นขอบเขตล่างของ X แล้ว $l \geq a$

สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Axiom of Completeness)

1. ให้ $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ A มีขอบเขตบน แล้ว A มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด
2. ให้ $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ A มีขอบเขตล่าง แล้ว A มีขอบเขตล่างค่ามากสุด

บทนิยาม 2.14 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริง a ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $n > N$ แล้ว $|a_n - a| < \varepsilon$

เขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $lim\ a_n = a$

ทฤษฎีบท 2.15 : ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้ว

(1) $\{a_n + b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a + b$

(2) $\{ca_n\}$ ลู่เข้าสู่ ca เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

(3) $\{a_n b_n\}$ ลู่เข้าสู่ ab

(4) ถ้า $b \neq 0$ และ $b_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

แล้ว $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{a}{b}$

ทฤษฎีบท 2.16 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ทฤษฎีบท 2.17 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนไม่ลดลง และ $\{x_n\}$ มีขอบเขตบน แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.18 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนไม่ลดลง และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขตบน แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกสู่บวกอนันต์

ทฤษฎีบท 2.19 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้น และ $\{x_n\}$ มีขอบเขตล่าง แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.20 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้น และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขตล่าง แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกสู่ลบอนันต์

บทนิยาม 2.21 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ เรากล่าวว่า $\{x_{n_k}\}$ เป็น**ลำดับย่อย (subsequence)** ของลำดับ $\{x_n\}$

บทนิยาม 2.22 : ลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่เข้าสู่** L **(converges to** L **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก K ซึ่งถ้า $k > K$ แล้ว $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$

บทนิยาม 2.23 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เราเรียกจำนวนจริง L ว่า **ลิมิตย่อย (subsequential limit)** ของลำดับ $\{x_n\}$ ถ้ามีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ L

ทฤษฎีบท 2.24 : ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

ทฤษฎีบท 2.25 : ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและมีลิมิตย่อยเพียงค่าเดียว

บทที่ 3
ฟังก์ชันต่อเนื่อง
(Continuous Functions)

ฟังก์ชันของตัวแปรเดียว คือฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงทั้งหมด ในบทนี้เราจะศึกษาความต่อเนื่องของฟังก์ชันของตัวแปรเดียวพร้อมทั้งผลสรุปที่ได้ ผลสรุปต่างๆของความต่อเนื่องเป็นเงื่อนไขสำคัญซึ่งก่อให้เกิดทฤษฎีสำคัญมากมายในแคลลูลัส ตัวอย่างเช่น ทฤษฎีบทค่ากลาง ทฤษฎีบทค่าสูงสุดค่าต่ำสุด และ ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญ ซึ่งเราจะศึกษาในบทที่ 4 เริ่มต้นในหัวข้อ 3.1 เราจะศึกษาลิมิตของฟังก์ชัน

3.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of a Function)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาบทนิยามของลิมิตพร้อมทั้งตัวอย่างและทฤษฎีบทที่เชื่อมโยงระหว่างลำดับและลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.1.1 : ให้ $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ แล้ว 0 เป็น จุดลิมิตของ A

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ ถ้า $\varepsilon \geq 1$ เห็นได้ชัดว่า $(-\varepsilon, \varepsilon)$ มีสมาชิกทั้งหมดของ A ในกรณีที่ $\varepsilon < 1$ โดยหลักอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

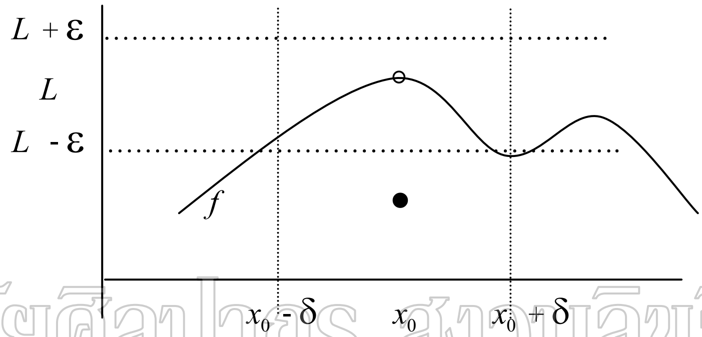
$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \text{และ} \quad \frac{1}{n} \in A \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$$

เพราะฉะนั้น $(-\varepsilon, \varepsilon)$ มีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์

นั่นคือ 0 เป็นจุดลิมิตของ A ■

บทนิยาม 3.1.2 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ x_0 เป็นจุดลิมิต ของ $D(f)$ **ลิมิตของฟังก์ชัน** f **เมื่อ** x **เข้าใกล้** x_0 **มีค่าเป็น** L **(limit of f as x approaches** x_0 **is L)** ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < | x - x_0 | < \delta$ และ $x \in D(f)$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ และเราสามารถแสดงความหมายนี้ได้ดังกราฟรูป 3-1



รูป 3 - 1

ตัวอย่าง 3.1.3 : ให้ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ เราจะแสดงว่า $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$

พิสูจน์ : เห็นได้ชัดว่า $D(f) = R - \{2\}$ และ 2 เป็นจุดลิมิตของ $D(f)$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

พิจารณา x ซึ่ง $0 < | x - 2 | < \delta$

จะได้ว่า

$$|f(x) - 8| = \left|\frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} - 8\right| = 2 | x - 2 | < 2\delta = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$ ■

ตัวอย่าง 3.1.4 : ให้ $f(x)=\sqrt{x+1}$ จะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=0$

พิสูจน์ : ในที่นี้ $D(f)$ = [-1 , ∞) และ -1 เป็นจุดลิมิตของ $D(f)$
ให้ $\varepsilon>0$ เลือก $\delta=\varepsilon^2$ สำหรับทุก x ซึ่ง $0<|x+1|<\delta$
เราได้ว่า

$$|f(x)-0| = |\sqrt{x+1}-0|$$
$$= \sqrt{x+1}<\sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=0$ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างลิมิตของฟังก์ชันและลำดับของจำนวนจริงซึ่งอยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.1.5 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ $D(f)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=L$
ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับ $\{x_n\} \subset D(f)$ ซึ่ง $x_n \neq x_0$ เมื่อ $n \in I^+$ และ $\lim x_n = x_0$
จะได้ว่า ลำดับ $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=L$
ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$ และ $\lim x_n = x_0$
เราจะแสดงว่าลำดับ $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ L
ให้ $\varepsilon>0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=L$ ดังนั้น มีจำนวนจริง $\delta>0$
ที่ทำให้ $|f(x)-L|<\varepsilon$ สำหรับทุก $x \in D(f)$ ซึ่ง

$$0<|x-x_0|<\delta$$

และเพราะว่า $\lim x_n = x_0$
ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้

$$|x_n-x_0|<\delta \text{ สำหรับทุก } n>N$$

นั่นคือเราได้ $| f(x_n) - L | < \varepsilon$ เมื่อ $n > N$

เพราะฉะนั้น $\lim f(x_n) = L$

($\leftarrow$) กำหนดว่า ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\{ x_n \} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$

เมื่อ $n \in I^+$

และ $\lim x_n = x_0$ แล้ว ลำดับ $\{ f(x_n) \}$ ลู่เข้าสู่ L

ในการพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ จะพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง

สมมติว่า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ไม่เป็นจริง

ดังนั้น มี $\varepsilon_1 > 0$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุก $\delta > 0$

จะสามารถหา $x \in D(f)$ ได้อย่างน้อย 1 ค่า ซึ่ง

$$0 < | x - x_0 | < \delta \text{ แต่ } | f(x) - L | \geq \varepsilon_1$$

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $\delta = \dfrac{1}{n}$

ดังนั้นมี $x_n \in D(f)$ ที่ทำให้ $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_1$ (*)

โดยที่ $0 < | x_n - x_0 | < \dfrac{1}{n}$

นั่นคือ $\{ x_n \} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$ ทุก $n \in I^+$

เราจะแสดงว่า $\lim x_n = x_0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุก $n > N$ เราได้ว่า

$$| x_n - x_0 | < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim x_n = x_0$

จากที่กำหนดให้ จะได้ว่า $\{ f(x_n) \}$ ลู่เข้าสู่ L

ดังนั้น สำหรับค่าบวก ε_1 จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ทุก $n > N$

จะได้ว่า

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon_1 \quad \text{ซึ่งขัดแย้งกับ (*)}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ เป็นจริง ■

ถ้าเรามีลำดับ $\{ x_n \}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า และ $x_n \in D(f)$ แล้ว $\{ f(x_n) \}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงเช่นกัน ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลู่เข้า เช่นเดียวกับ $\{ x_n \}$ เงื่อนไขของการเป็นลำดับลู่เข้าของ $\{ f(x_n) \}$ คือความต่อเนื่องของ f ที่ลิมิตของ $\{ x_n \}$ ดังจะศึกษาในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่าง 3.1.6 : ให้ $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

และให้ $\{ x_n \}$ นิยามโดย

$$x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

ดังนั้น
$$f(x_n) = \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

เห็นได้ชัดว่า

$$f(x_1) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \ , \ f(x_2) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1 \ , \ f(x_3) = \sin\frac{7\pi}{2} = -1$$

และโดยทั่วไป

$$f(x_n) = (-1)^n$$

เพราะฉะนั้น $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ 0 แต่ $\{ f(x_n) = (-1)^n \}$ เป็นลำดับลู่ออก ■

ตัวอย่าง 3.1.7 : ให้ $f(x) = x^3$ ดังนั้น $D(f) = R$ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

ให้ $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ แล้ว $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ 2

และ

$$f(x_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^3 = 8 - \frac{12}{n} + \frac{6}{n^2} - \frac{1}{n^3}$$

เห็นได้ว่า $\{ f(x_n) \}$ ลู่เข้าสู่ 8 ■

ทฤษฎีบท 3.1.8 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้อง $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ ถ้า h เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) \le h(x) \le g(x)$ เมื่อ $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ สำหรับบางค่าของ $\delta > 0$ แล้ว $\lim_{x \to a} h(x) = L$

พิสูจน์ : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ที่สอดคล้องว่า $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$
สมมติ ให้ h เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(x) \le h(x) \le g(x)$
เมื่อ $x \in (a-\delta,\ a+\delta)\setminus\{a\}$ สำหรับบางค่าของ $\delta > 0$
เราจะแสดงว่า $\lim_{x\to a} h(x) = L$
ให้ $\varepsilon > 0$
เพราะว่า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = L$
ดังนั้นมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ที่สอดคล้องว่า

$$| f(x) - L | < \varepsilon \text{ เมื่อ } x \in D(f) \text{ และ } 0 < | x - a | < \delta_1$$

และ

$$| g(x) - L | < \varepsilon \text{ เมื่อ } x \in D(g) \text{ และ } 0 < | x - a | < \delta_2$$

ให้ $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$

พิจารณา $x \in D(f)$ ซึ่ง $0 < | x - a | < \delta_3$

เราได้ว่า

$$f(x) \le h(x) \le g(x),\ -\varepsilon \le f(x) - L \le \varepsilon,\ -\varepsilon \le g(x) - L \le \varepsilon$$

ซึ่งทำให้

$$f(x) - L \le h(x) - L \le g(x) - L$$

และสรุปได้ว่า

$$-\varepsilon \le h(x) - L \le \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x\to a} h(x) = L$ ■

3.2 ความต่อเนื่อง (Continuity)

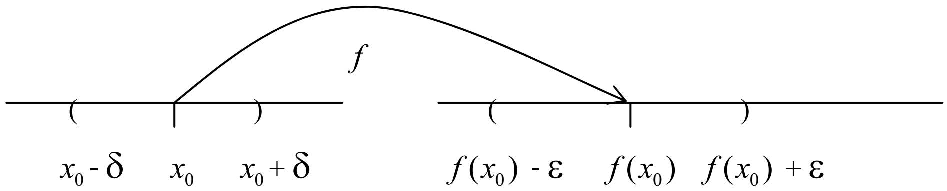
ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความต่อเนื่องของฟังก์ชันและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับความต่อเนื่อง

3.2.1 ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งเกี่ยวข้องกับลิมิตของฟังก์ชัน ก่อนอื่นเราจะนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดใดๆในโดเมนของฟังก์ชัน

บทนิยาม 3.2.1.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $x_0 \in D(f)$ จะกล่าวว่า f **ต่อเนื่อง (continuous) ที่** x_0 ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$ เมื่อ $| x - x_0 | < \delta$ และ $x \in D(f)$

จากนิยามความต่อเนื่อง ให้ความหมายว่า ถ้าเราเลือกช่วงรอบจุด $f(x_0)$ คือช่วง $(f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon)$ แล้วจะมีช่วงรอบจุด x_0 ซึ่งคือช่วง $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ที่ทำให้ทุกจุดใน $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D(f)$ จะให้ค่าโดยฟังก์ชัน f อยู่ในช่วง $(f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon)$ นั่นคือ $f ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D(f)) \subset (f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon)$ ดังแสดงในรูป 3-2



รูป 3-2

จากบทนิยาม 3.1.2 เห็นได้ว่า ถ้ามี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D(f) = \{ x_0 \}$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ x_0 ในกรณีที่ x_0 เป็นจุดลิมิตของ $D(f)$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ตัวอย่าง 3.2.1.2 : ให้ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ แล้ว f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะว่า $2 \notin D(f)$

อย่างไรก็ตาม ถ้ากำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 8 & , x = 2 \end{cases}$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

พิจารณา x ซึ่ง $| x - 2 | < \delta$

กรณีที่ 1 : ถ้า $x = 2$ แล้ว

$$|f(x) - 8| = 0 < \varepsilon$$

กรณีที่ 2 : ถ้า $x \neq 2$ จะได้ว่า

$$|f(x)-8| = \left|\frac{2(x^2-4)}{x-2}-8\right| = 2\,|\,x-2\,| < 2\delta = \varepsilon$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ 2 ■

ทฤษฎีบท 3.2.1.3 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $x_0 \in D(f)$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ $lim\, f(x_n) = f(x_0)$ สำหรับทุกลำดับ $\{x_n\} \subset D(f)$ ซึ่ง $lim\, x_n = x_0$

พิสูจน์ : ($\rightarrow$) กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องที่ x_0

ให้ $\{x_n\} \subset D(f)$ และ $lim\, x_n = x_0$

จะแสดงว่า $lim\, f(x_n) = f(x_0)$

ให้ $\varepsilon > 0$

เพราะว่า f ต่อเนื่องที่จุด x_0 ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|\,f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon$$

เมื่อ $|\,x-x_0\,| < \delta$ และ $x \in D(f)$

และเพราะว่า $lim\, x_n = x_0$ ดังนั้น มี จำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้

$$|\,x_n - x_0\,| < \delta$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$

พิจารณา $n > N$ จะได้ว่า $|\,x_n - x_0\,| < \delta$

ดังนั้น

$$|\,f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon$$

นั่นคือ $lim\, f(x_n) = f(x_0)$

($\leftarrow$) กำหนดให้ว่า สำหรับทุกลำดับ $\{x_n\} \subset D(f)$ ซึ่ง $lim\, x_n = x_0$

แล้วจะได้ว่า $lim\, f(x_n) = f(x_0)$

สมมติว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ x_0

ดังนั้นมี $\varepsilon_1 > 0$ ที่ทำให้ สำหรับทุก $\delta > 0$ จะมี $x \in D(f)$

ซึ่งสอดคล้อง

$$|\,x-x_0\,| < \delta \text{ และ } |\,f(x) - f(x_0)\,| \geq \varepsilon_1$$

สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ เมื่อเลือก $\delta = \dfrac{1}{n}$

เราจะได้ว่ามี $x_n \in D(f)$ ซึ่งสอดคล้อง

$$|x_n - x_0| < \delta \text{ และ } |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_1$$

โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกับ ทฤษฎีบท 3.1.5 จะเกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ x_0 ■

ตัวอย่าง 3.2.1.4 : ให้ ฟังก์ชัน f นิยามโดย $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 1, & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

แล้ว f ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง

พิสูจน์ : ให้ x_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ

กรณีที่ 1 : ถ้า x_0 เป็นจำนวนตรรกยะ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

เลือกจำนวนอตรรกยะ $x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$

เราจะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x_0 และ $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $1 \neq f(x_0) = -1$

ดังนั้นโดย ทฤษฎีบท 3.2.1.3 f ไม่ต่อเนื่องที่ x_0

กรณีที่ 2 : ถ้า x_0 เป็นจำนวนอตรรกยะ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

เลือกจำนวนตรรกยะ $x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$

เราจะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x_0 และ $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $-1 \neq f(x_0) = 1$

ดังนั้นโดย ทฤษฎีบท 3.2.1.3 f ไม่ต่อเนื่องที่ x_0 ■

ตัวอย่าง 3.2.1.5 : นิยามฟังก์ชัน f ดังนี้ ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะหรือ $x = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ ถ้า $x = \frac{m}{n}$ เป็นจำนวนตรรกยะซึ่ง $n > 0$ และ m,n ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมกัน แล้ว $f(x) = \frac{1}{n}$

เราจะแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ทุกจำนวนอตรรกยะ และ f ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจำนวนตรรกยะซึ่งไม่ใช่ศูนย์

พิสูจน์ : (1) ให้ x_0 เป็นจำนวนตรรกยะ และ $x_0 \neq 0$

จะแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่อง ที่ x_0

ให้ $x_0 = \frac{m}{n}$ เมื่อ m , n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมกัน และ $n > 0$

สมมติ f ต่อเนื่อง ที่ x_0

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2n}$

ดังนั้นมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $|x - x_0| < \delta$

แล้ว

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2n}$$

เลือก จำนวนอตรรกยะ $x \in (x_0 , x_0 + \delta)$

ดังนั้น

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2n}$$

แต่จากการกำหนดฟังก์ชัน เราได้

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่อง ที่ x_0

(2) ให้ x_0 เป็นจำนวนอตรรกยะ

จะแสดงว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x_0

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักอาร์คีมีดีส จะมีจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$

เนื่องจาก x_0 เป็นจำนวนอตรรกยะ

ดังนั้นมีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $x_0 \in (c , c + 1)$

เลือก $\delta_1 = \frac{1}{2}\min\{ |c - x_0|, |c + 1 - x_0|\}$

ดังนั้น

$(x_0 - \delta_1 , x_0 + \delta_1)$ ไม่มีจำนวนเต็ม

ทำนองเดียวกัน จะมี $\delta_2 > 0$

ที่ทำให้ $(x_0 - \delta_2 , x_0 + \delta_2)$ ไม่มีจำนวนตรรกยะในรูป $\frac{m}{2}$

เมื่อ m และ 2 ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมกัน

โดยทั่วไป สำหรับ $k \in \{1, 2, 3, \ldots\ldots, N\}$ จะมี $\delta_k > 0$

ซึ่งทำให้ $(x_0 - \delta_k , x_0 + \delta_k)$ ไม่มีจำนวนตรรกยะในรูป $\frac{m}{k}$

เมื่อ m และ k ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมกัน

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\}$

เราจะแสดงว่า $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$ เมื่อ $|\ x - x_0\ | < \delta$

กรณีที่ 1 : ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| = |0 - 0| < \varepsilon$$

กรณีที่ 2 : ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น x ไม่อยู่ในรูป $\dfrac{m}{k}$ สำหรับ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$

เมื่อ m และ k ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมกัน

นั่นคือ $x = \dfrac{m}{n}$ สำหรับบางค่าของ $n > N$

เมื่อ m และ n ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมกัน

จะได้

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 3.2.1.6 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ ถ้า f และ g ต่อเนื่องที่ x_0 แล้ว

(1) $\alpha f + \beta g$ ต่อเนื่องที่ x_0 สำหรับทุกจำนวนจริง α และ β

(2) fg ต่อเนื่องที่ x_0

(3) $\dfrac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ x_0 ถ้า $g(x_0) \neq 0$

พิสูจน์ : (1) ให้ $\{x_n\} \subset D(f) \cap D(g)$ และ $lim\, x_n = x_0$

จะแสดงว่า $\{\alpha f(x_n) + \beta g(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $\alpha f(x_0) + \beta g(x_0)$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ x_0 และ g ต่อเนื่องที่ x_0

ดังนั้นโดย ทฤษฎีบท 3.2.1.3 สรุปได้ว่า

$\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$ และ $\{g(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $g(x_0)$

โดยทฤษฎีบท 2. 15 จะได้ว่า

$\{\alpha f(x_n) + \beta g(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $\alpha f(x_0) + \beta g(x_0)$

โดย ทฤษฎีบท 3.2.1.3 จะได้ว่า

$$\alpha f + \beta g \text{ ต่อเนื่องที่ } x_0 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } \alpha \text{ และ } \beta$$

การพิสูจน์ ข้อ (2) และ (3) เป็นการพิสูจน์ทำนองเดียวกัน ■

ทฤษฎีบท 3.2.1.7 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งเรนจ์ ของ f เป็นสับเซตของ $D(g)$ ให้ $x_0 \in D(f)$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ x_0 และ g ต่อเนื่องที่ $f(x_0)$ แล้ว $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ x_0

พิสูจน์ : เราสังเกตได้ว่า $D(g \circ f) = D(f)$

ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน $D(f)$ ซึ่ง $\lim x_n = x_0$

เราจะแสดงว่า $\{(g \circ f)(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $(g \circ f)(x_0)$

ดังนั้นโดย ทฤษฎีบท 3.2.1.3 จะได้ว่า

$$\{f(x_n)\} \text{ ลู่เข้าสู่ } f(x_0)$$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\{f(x_n)\}$ เป็นลำดับใน $D(g)$

และ g ต่อเนื่องที่ $f(x_0)$

ดังนั้น

$$\{g(f(x_n))\} \text{ ลู่เข้าสู่ } g(f(x_0))$$

เพราะฉะนั้น

$$\{(g \circ f)(x_n)\} \text{ ลู่เข้าสู่ } (g \circ f)(x_0)$$

นั่นคือ $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ x_0 ■

3.2.2 ความต่อเนื่องบนเซต (Continuity on a Set)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนเซตและศึกษาเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนเซต

บทนิยาม 3.2.2.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $A \subset D(f)$ เราจะกล่าวว่า f **ต่อเนื่องบน** A **(continuous on** A **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ และแต่ละ $x_0 \in A$ จะมี $\delta > 0$ ที่สอดคล้องว่า $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ สำหรับทุก x ซึ่ง $|x - x_0| < \delta$ และ $x \in D(f)$

ตัวอย่าง 3.2.2.2 : ให้ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ บนช่วง (0 , 1) จะแสดงว่า f ต่อเนื่องบน (0 , 1)

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ และ $x_0 \in (0,1)$ เราจะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $|x - x_0| < \delta$ และ $x \in (0,1)$ แล้ว

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \varepsilon$$

ดังนั้นเราจะต้องหาขอบเขตบนของ $\dfrac{1}{|x|}$ เมื่อ $|x - x_0| < \delta$

ในการหาขอบเขตบนเราจะจำกัดค่า $\delta \le \dfrac{x_0}{2}$ และจะได้

$$|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$$

หรือ

$$\frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{x} < \frac{2}{x_0}$$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \frac{2}{x_0^2}\cdot\delta$$

ถ้าเราเลือก $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{2}x_0^2$ แล้ว

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

ดังนั้นเมื่อเลือก $\delta = \min\left\{\dfrac{x_0}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}x_0^2\right\}$ แล้วสำหรับทุก $x \in (0,1)$ ซึ่ง $|x - x_0| < \delta$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

นั่นคือ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ต่อเนื่องบน (0 , 1) ■

บทนิยาม 3.2.2.3 : เรียกเซต U ของจำนวนจริงว่า **เซตเปิด (open set)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in U$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $(x - \delta , x + \delta) \subset U$

ตัวอย่างของเซตเปิด เช่น ช่วงเปิด (a,b) หรือ $(a , +\infty)$

บทนิยาม 3.2.2.4 : ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง เซต V เป็น**เซตเปิดเทียบกับ** A **(open relative to** A **)** ถ้าสำหรับแต่ละสมาชิก $v \in V$ จะมี $\delta > 0$
ซึ่งสอดคล้อง $(v - \delta , v + \delta) \cap A \subset V$

บทนิยาม 3.2.2.5 : เรียกเซต A ว่า **เซตปิด (closed set)** ถ้า A^c เป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 3.2.2.6 : จงตรวจสอบดูว่าเซตต่อไปนี้ เป็นเซตเปิดหรือเซตปิด

(1) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..\right\}$

(2) $A = (0, 1) \cup (1 , 2]$

พิสูจน์ : (1) ให้ $1 \in A$ สำหรับทุก $\delta > 0$

จะได้ $a = 1 + \frac{\delta}{2} \notin A$ แต่ $1 + \frac{\delta}{2} \in (1 - \delta , 1 + \delta)$

ดังนั้น A ไม่เป็นเซตเปิด

(2) A ไม่เป็นเซตเปิด และ A^c ไม่เป็นเซตเปิด

ให้ $2 \in A$ สำหรับทุก $\delta > 0$

จะได้ $a = 2 + \frac{\delta}{2} \notin A$ แต่ $2 + \frac{\delta}{2} \in (2 - \delta , 2 + \delta)$

และจาก $A = (0, 1) \cup (1 , 2]$

จะได้ $A^c = (-\infty , 0] \cup (2 , +\infty) \cup \{1\}$

ให้ $\delta > 0$ จะได้ว่า $(-\delta , \delta) \not\subset A^c$ ทั้งนี้เนื่องจาก

ถ้า $\delta \geq 1$ แล้ว $a = \frac{1}{2} \notin A^c$ แต่ $a \in (-\delta , \delta)$

และถ้า $\delta < 1$ แล้ว $a = \frac{\delta}{2} \in (-\delta, \delta)$ แต่ $\frac{\delta}{2} \notin A^c$ ■

ตัวอย่าง 3.2.2.7 : เห็นได้ชัดว่า $[0, 4)$ ไม่เป็นเซตเปิดแต่ $[0, 4)$ เป็นเซตเปิดเทียบกับ $[0, +\infty)$

พิสูจน์ : ตรวจสอบเมื่อ $v = 0$ เลือก $\delta = 1$
เพราะฉะนั้น

$$(-1, 1) \cap [0, +\infty) = [0, 1) \subset [0, 4)$$

กรณีที่ $v \in (0, 4)$

เลือก $$\delta = \frac{1}{2}\min\{|v|, |v-4|\}$$

แล้ว $$(v - \delta, v + \delta) \cap [0, +\infty) \subset [0, 4)$$ ■

ถ้า $f : X \to Y$ และถ้า $B \subset Y$ แล้ว เรานิยามสัญลักษณ์ $f^{-1}(B)$ ดังนี้
$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$
และจะได้

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

ตัวอย่าง 3.2.2.8 : กำหนดให้ $f(x) = x^2$ สำหรับทุก $x \in R$
ให้ $A = [0, 4]$ แล้วได้ว่า

$$f^{-1}(A) = [-2, 2]$$

ให้ $B = (0, 4)$ แล้วได้ว่า

$$f^{-1}(B) = (-2, 2)$$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.2.9 : ให้ $f : X \to Y$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละเซตเปิด $A \subset Y$, $f^{-1}(A)$ เป็นเซตเปิดเทียบกับ X

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ $f : X \to Y$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X
ให้ $A \subset Y$ และ A เป็นเซตเปิด
เราจะแสดงว่า $f^{-1}(A)$ เป็นเซตเปิดเทียบกับ X
ให้ $x_0 \in f^{-1}(A)$ ดังนั้น $f(x_0) \in A$
เนื่องจาก A เป็นเซตเปิด ดังนั้นมีช่วง $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset A$

สำหรับบางค่าของ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ x_0 ดังนั้นมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $|x - x_0| < \delta$ และ $x \in X$ แล้ว $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

นั่นคือ

ถ้า $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap X$ แล้ว $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon) \subset A$

เพราะฉะนั้น

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \subset f^{-1}(A)$$

และสรุปได้ว่า $f^{-1}(A)$ เป็นเซตเปิดเทียบกับ X

($\leftarrow$) สมมติแต่ละเซตเปิด $A \subset Y$, $f^{-1}(A)$ เป็นเซตเปิดเทียบกับ X

เราจะแสดงว่า f ต่อเนื่องบน X

ให้ $x_0 \in X$ และ ให้ $\varepsilon > 0$

จะได้ว่า

$$f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)) = \{x \in X \mid f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)\}$$

เนื่องจาก $(f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)$ เป็นเซตเปิด

จากที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)) \text{ เป็นเซตเปิดเทียบกับ } X$$

เนื่องจาก $x_0 \in f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon))$

ดังนั้น จะมี ช่วง $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ ที่ทำให้

$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap X \subset f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon))$ สำหรับบาง $\delta > 0$

นั่นคือ ทุก $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap D(f)$

จะได้ว่า

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)$$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ x_0 และสรุปได้ว่า f ต่อเนื่องบน X ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ให้เงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต

ทฤษฎีบท 3.2.2.10 : ให้ f เป็นฟังก์ชันแล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) f ต่อเนื่องบน $D(f)$

(2) ถ้า $x_0 \in D(f)$ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน $D(f)$ ซึ่ง $\{x_n\}$ลู่เข้าสู่ x_0 แล้ว $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$

(3) ถ้า A เป็นเซตของจำนวนจริงซึ่งเป็นเซตเปิด แล้ว $f^{-1}(A)$ เป็นเซตเปิดเทียบกับ $D(f)$

พิสูจน์ : สำหรับ (1) $\leftrightarrow$ (2) เป็นผลที่ได้จาก ทฤษฎีบท 3.2.1.3

สำหรับ (1) $\leftrightarrow$ (3) เป็นผลที่ได้จาก ทฤษฎีบท 3.2.2.9

สำหรับ (2) $\leftrightarrow$(3) เป็นจริง จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2

ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

3.2.3. สมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง (Properties of Continuous Functions)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาผลที่ได้จากความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนเซต ผลสรุปเหล่านี้เป็นรากฐานสำคัญในแคลคูลัส ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว เช่น ทฤษฎีบทค่ากลาง ทฤษฎีบทค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด และทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย

ทฤษฎีบท 3.2.3.1 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c และ $f(c) > 0$ แล้วจะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (c - \delta , c + \delta) \cap D(f)$

พิสูจน์ : ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c และ $f(c) > 0$

ให้ $\varepsilon = f(c)$ ดังนั้นจะต้องมี $\delta > 0$

ที่ทำให้ $| f(x) - f(c) | < \varepsilon$ เมื่อ $c - \delta < x < c + \delta$ และ $x \in D(f)$

ดังนั้น สำหรับทุก $x \in (c - \delta , c + \delta) \cap D(f)$

เราได้ว่า

$$- f(c) < f(x) - f(c) < f(c)$$

หรือ

$$0 = - f(c) + f(c) < f(x) < f(c) + f(c)$$

ดังนั้น $f(x) > 0$ เมื่อ $x \in (c - \delta , c + \delta) \cap D(f)$ ■

โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.2.3.1 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.3.2 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c และ $f(c) < 0$ แล้วจะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (c - \delta , c + \delta) \cap D(f)$

ทฤษฎีบท 3.2.3.3 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม แล้วมี $c \in [a,b]$ ซึ่ง $f(c) = 0$

พิสูจน์ : จะแยกพิจารณาเครื่องหมายของ $f(a)$ และ $f(b)$ เป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $f(a) > 0$ และ $f(b) < 0$

ให้ $A = \{ t \in [a,b] \mid f(x) > 0$ ถ้า $x \in [a,t] \}$

เห็นได้ว่า $a \in A$ (เพราะว่า $f(a) > 0$) เนื่องจาก b เป็นขอบเขตบนของ A

ดังนั้น โดยสัจพจน์ของความบริบูรณ์ A มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด สมมติ เป็น c

เห็นได้ชัดว่า $a \le c \le b$

เราจะแสดงว่า $a < c < b$

ถ้า $a = c$ โดยทฤษฎีบท 3.2.3.1 จะมี $x_1 \in (a , b]$

ซึ่ง $f(x) > 0$ บนช่วง $[a , x_1]$

ดังนั้น $x_1 \in A$ เนื่องจาก $a < x_1$ และ $a = c$

ดังนั้น $c < x_1$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ถ้า $b = c$ แล้วโดยทฤษฎีบท 3.2.3.2 จะมีช่วง $(b - \delta, b]$

ซึ่ง $f(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (b - \delta, b]$

เนื่องจาก $b - \delta$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ A ดังนั้นมี $x_2 \in A$

ซึ่ง $b - \delta < x_2 \le b$

เพราะฉะนั้น $f(x_2) < 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ต่อไปจะแสดงว่า $f(c) = 0$

สมมติ $f(c) < 0$

โดยทฤษฎีบท 3.2.3.2 จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $f(x) < 0$ บนช่วง $(c - \delta , c + \delta)$

ดังนั้น $c - \frac{\delta}{2}$ เป็นขอบเขตบนของ A ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ในกรณีที่ $f(c) > 0$

เราสามารถสรุปได้ว่า จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $f(x) > 0$ บนช่วง $[c\ ,\ c+\frac{\delta}{2}\ ] \subset [a,b]$
ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งกับการเป็นขอบเขตบนของ c

ดังนั้น $f(c) = 0$

กรณีที่ 2 : $f(a) < 0$ และ $f(b) > 0$ การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกับ กรณีที่ 1 ■

ตัวอย่าง 3.2.3.4 :

(1) จงแสดงว่า สมการ $\cos x = x$ มีคำตอบ

(2) สมมติ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0\ ,2]$ ซึ่ง $f\ (0) = f\ (2)$ จงแสดงว่า มี $x \in [\ 0\ ,\ 1]$ ซึ่ง $f(x) = f(x+1)$

พิสูจน์ : **(1)** ให้ $f\ :[0\ ,\frac{\pi}{2}\ ] \rightarrow R$ นิยามดังนี้

$f(x) = \cos\ x - x$ สำหรับทุก $x \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ \ ]$

แล้วได้ว่า $f\ (\frac{\pi}{2}) = \cos\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < 0$

$$f\ (0) = \cos 0\ -\ 0 > 0$$

ดังนั้น โดย ทฤษฎีบท 3.2.3.3 จะมี $c \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$ ซึ่ง $f(c) = \cos c - c = 0$

(2) ให้ $f\ :[0\ ,2] \longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f\ (0) = f\ (2)$

ให้ $g\ (\mathrm{x}) = f(x)\ -\ f(x+1)\ ,\ x \in [\ 0\ ,\ 1]$

ดังนั้น g ต่อเนื่องบนช่วง $[\ 0\ ,\ 1]$

และได้ว่า

$$g\ (1) = f\ (1) - f\ (2) = f\ (1) - f\ (0)$$

$$g\ (0) = f\ (0) - f\ (1)$$

ถ้า $f\ (0) = f\ (1)$ แล้ว สิ่งที่ต้องการเป็นจริง

ถ้า $f\ (0) \neq f\ (1)$ แล้ว $g\ (0)$ และ $g\ (1)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

โดย ทฤษฎีบท 3.2.3.3 จะมี $x \in [\ 0\ ,\ 1]$ ซึ่ง $g\ (\mathrm{x}) = f(x) - f(x+1) = 0$

นั่นคือ $f(x) = f(x+1)$ ■

3.3 โทโพโลยีของจำนวนจริง (Topology of the Real Numbers)

บทนิยาม 3.3.1 : สำหรับเซต I ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง ให้ $f : I \to P(R)$ และ $f(\alpha) = I_\alpha$ เมื่อ $\alpha \in I$ เราเรียก $\{ I_\alpha : \alpha \in I \}$ ว่าเป็น **แฟมมิลี (family)** หรือ **คอลเลกชัน (collection)** ของสับเซตของ R ที่มี **เซตดรรชนี (index set)** คือ I

ในที่นี้เราจะกำหนดสัญลักษณ์ $\bigcup_{\alpha \in I} I_\alpha$ และ $\bigcap_{\alpha \in I} I_\alpha$ แทนเซตต่อไปนี้

$\bigcup_{\alpha \in I} I_\alpha = \{ x \in R$: มี $\alpha \in I$ ซึ่ง $x \in I_\alpha \}$

$\bigcap_{\alpha \in I} I_\alpha = \{ x \in R : x \in I_\alpha$ ทุก $\alpha \in I \}$

ในกรณีที่ $I = \{ 1,2,\ldots\ldots, n \}$ เราเขียนแทนเซตข้างบนโดย $\bigcap_{j=1}^{n} I_j$ และ $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$

บทนิยาม 3.3.2 : .ให้ $A \subset R$ และ $\{ I_\alpha : \alpha \in I \}$ เป็นแฟมมิลีของเซตเปิด เรากล่าวว่า $\{ I_\alpha : \alpha \in I \}$ เป็น **ตัวคลุมเปิด (open cover)** สำหรับ A ถ้าสำหรับแต่ละ $a \in A$ จะมี $\alpha \in I$ ซึ่ง $a \in I_\alpha$

ในบางกรณีเราอาจจะเขียนแทน $\{ I_\alpha : \alpha \in I \}$ ด้วย $\{ I_\alpha \}$

บทนิยาม 3.3.3 : .ให้ $\{ I_\alpha : \alpha \in I \}$ เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ $A \subset R$ ถ้ามี $J \subset I$ ซึ่ง B เป็นเซตจำกัดและ $\{ I_\alpha : \alpha \in J \}$ เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ A เรากล่าวว่า $\{ I_\alpha : \alpha \in J \}$ ว่าเป็น **ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด (finite subcover)** สำหรับ $\{ I_\alpha : \alpha \in I$ $\}$

บทนิยาม 3.3.4 : ให้ $A \subset R$ จะเรียก A ว่าเป็น **เซตคอมแพกต์ (compact set)** ถ้าทุกตัวคลุมเปิดของ A มี **ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด (finite subcover)**

ตัวอย่าง 3.3.5 : จงแสดงว่าแฟมมิลีในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ $A = [\,0\,,1\,)$

(1) { (-0.2 , 0.2) , (0 , 0.4) , (0.2 , 0.6) , (0.4 , 0.8) , (0.6 , 1)

(2) $\left\{ \left(-1, 1 - \frac{1}{n} \right) : n \in I^+ \right\}$

(3) $\{ R \}$

พิสูจน์ : (1) ให้ $A_1 = (-0.2, 0.2)$, $A_2 = (0, 0.4)$, $A_3 = (0.2, 0.6)$, $A_4 = (0.4, 0.8)$, $A_5 = (0.6, 1)$ สำหรับแต่ละสมาชิก a ของ $[0, 1)$ เห็นได้ชัดว่าจะมี $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
ซึ่ง $a \in A_i$

(2) สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $I_n = (-1, 1 - \frac{1}{n})$

ให้ $a \in A$ ดังนั้น $0 \leq a < 1$

โดย หลักอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง

$$\frac{1}{n_0} < 1 - a$$

หรือ

$$a < 1 - \frac{1}{n_0}$$

เราจึงสรุปได้ว่า $a \in I_{n_0}$

(3) เนื่องจากทุก $a \in [0, 1)$ เราได้ว่า $a \in R$ และ $R = (-\infty, \infty)$ เป็นช่วงเปิด
ดังนั้น $\{ R \}$ เป็นตัวคลุมเปิดสำหรับ $[0, 1)$ ■

ตัวอย่าง 3.3.6 : จงแสดงว่าแฟมมิลีในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นตัวคลุมเปิดสำหรับ A ซึ่งไม่มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด

(1) $A = [1, \infty)$

$\{ I_n \} = \{ (0, n) : n \in I^+ \}$

(2) $A = (0, 1)$

$$\{I_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right) : n \in I^+ \right\}$$

(3) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in I^+ \right\}$

$$\{I_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n},2\right) : n \in I^+\right\}$$

พิสูจน์ : **(1)** ประการแรกเราจะแสดงว่า $\{ I_n \} = \{(0, n) : n \in I^+ \}$ เป็น ตัวคลุมเปิดสำหรับ A ให้ $a \in A$ เลือกจำนวนเต็มบวก $n_0 > a$ ดังนั้น $a \in I_{n_0}$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\{ I_n \}$ ไม่มี ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด ถ้า $\{ I_n \}$ มี ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด สมมุติเป็น $\{I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_k}\}$ เมื่อ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ เนื่องจาก $n_k + 1 \in A$ แต่ $n_k + 1 \notin I_{n_i}$ ทุก i= 1 , 2 , ……., k

ดังนั้น $\{I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_k}\}$ ไม่เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ A ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\{ I_n \}$ ไม่มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด

(2) ในการแสดงว่า $\{I_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) : n \in I^+\right\}$ เป็นตัวคลุมเปิดย่อย สำหรับ A

ให้ $a \in (0, 1)$

โดย หลักอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง

$$n_0 > \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{1-a}\right\}$$

ดังนั้น

$$n_0 > \frac{1}{a}, \quad n_0 > \frac{1}{1-a}$$

จาก $n_0 > \dfrac{1}{a}$

จะได้ $a > \dfrac{1}{n_0}$

และจาก $n_0 > \dfrac{1}{1-a}$

จะได้ $\dfrac{1}{n_0} < 1 - a$ หรือ $a < 1 - \dfrac{1}{n_0}$

ดังนั้น $a \in I_{n_0}$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\{ I_n \}$ ไม่มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด ถ้า $\{ I_n \}$ มี ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด สมมุติเป็น $\{I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_k}\}$ เมื่อ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{n_k + 1} \in A$ แต่

$$\frac{1}{n_k + 1} \notin I_{n_i} \text{ ทุก } i = 1, 2, \ldots\ldots, k$$

ดังนั้น $\{I_{n_1},.I_{n_2} \quad , \quad I_{n_k}\}$ ไม่เป็น ตัวคลุมเปิด สำหรับ A ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\{I_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) : n \in I^+\right\}$ ไม่มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด

(3) ประการแรกเราจะแสดงว่า $\{I_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right) : n \in I^+\right\}$ เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ A

ให้ $a \in A$ ดังนั้น $a = \frac{1}{n_0}$ สำหรับบางค่าของ $n_0 \in I^+$ ให้ $n = n_0 + 1$

ดังนั้น $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$ แล้วสรุปได้ว่า $a \in I_n$

ต่อไปเราจะแสดงว่า { I_n } ไม่มี ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด ถ้า { I_n } มี ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด สมมุติเป็น $\{I_{n_1},.I_{n_2} \quad , \quad I_{n_k}\}$ เมื่อ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$

เห็นได้ว่า $\frac{1}{n_k + 1} \in A$ แต่

$$\frac{1}{n_k + 1} \notin I_{n_i} \text{ ทุก } i = 1, 2, \ldots\ldots, k$$

ดังนั้น $\{I_{n_1},.I_{n_2} \quad , \quad I_{n_k}\}$ ไม่เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ S ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\{I_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right) : n \in I^+\right\}$ ไม่มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด ■

ทฤษฎีบท 3.3.7 :

(1) ถ้า { $A_1, \ldots\ldots\ldots, A_n$ } เป็นแฟมมิลีจำกัดของเซตเปิด แล้ว $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ เป็นเซตเปิด

(2) ถ้า { $A_\alpha : \alpha \in A$ } เป็นแฟมมิลีของเซตเปิด แล้ว $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ : (1) ให้ { $A_1, \ldots\ldots\ldots, A_n$ } เป็นแฟมมิลีจำกัดของเซตเปิด

ให้ $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ดังนั้น $x \in A_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$

เพราะว่า A_i เป็นเซตเปิด ดังนั้น

$$\text{จะมี } \delta_i > 0 \text{ ซึ่งทำให้ } (x - \delta_i, x + \delta_i) \subset A_i \;, \; i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \ldots\ldots, \delta_n\}$

เราจะแสดงว่า $(x - \delta, x + \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

ให้ $y \in (x - \delta, x + \delta)$

เพราะฉะนั้น

$$|x - y| < \delta_i \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้น $y \in (x - \delta_i, x + \delta_i) \subset A_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

และจะได้

$$y \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

นั่นคือ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ เป็นเซตเปิด ■

(2) ให้ $\{ A_\alpha : \alpha \in A \}$ เป็นคอลเลกชันของเซตเปิด และให้ $x \in \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

แล้ว $x \in A_{\bar{\alpha}}$ สำหรับบางค่าของ $\bar{\alpha} \in A$

เพราะว่า $A_{\bar{\alpha}}$ เป็นเซตเปิด ดังนั้นมี $\delta > 0$

ซึ่งทำให้ $(x - \delta, x + \delta) \subset A_{\bar{\alpha}}$

นั่นคือ $(x - \delta, x + \delta) \subset \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

ดังนั้น $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ เป็นเซตเปิด ■

ทฤษฎีบท 3.3.8 :

(1) ถ้า $\{ A_\alpha \}$ เป็นแฟมมิลีของเซตปิด แล้ว $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$ เป็นเซตปิด

(2) ถ้า $\{ A_1, \ldots, A_n \}$ เป็นแฟมมิลีจำกัดของเซตปิดแล้ว $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ : (1) ให้ $\{ A_\alpha \}$ เป็นแฟมมิลีของสับเซตปิด

จากกฎเดอมอร์แกน $\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha \right)^C = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha^c$

เพราะว่า A_α เป็นเซตปิด ดังนั้น A^c_α เป็นเซตเปิด

โดยทฤษฎีบท 3.3.7 สรุปได้ว่า

$\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha^c$ เป็นเซตเปิด

นั่นคือ $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$ เป็นเซตปิด

(2) ให้ { A_1 , …….., A_n } เป็นแฟมมิลีจำกัดของเซตปิด

จากกฎเดอมอร์แกน $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$

เพราะว่า A_i เป็นเซตปิด ดังนั้น A^c_i เป็นเซตเปิด สำหรับทุก i = 1 , 2 ,….., n

โดยทฤษฎีบท 3.3.7 สรุปได้ว่า $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ เป็นเซตเปิด

นั่นคือ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ เป็นเซตปิด ■

ทฤษฎีบท 3.3.9 : A เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ $b(A) \subset A$

พิสูจน์ : ($\rightarrow$) ให้ A เป็นเซตปิด และให้ x เป็นจุดขอบของ A

เราจะแสดงว่า $x \in A$ สมมุติ $x \notin A$ ดังนั้น $x \in A^c$

และเนื่องจาก A เป็นเซตปิด

จะได้ A^c เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $(x - \delta , x + \delta) \subset A^c$

เพราะฉะนั้น

$$(x - \delta , x + \delta) \cap A = \phi$$

ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นจุดขอบของ x

ดังนั้น $x \in A$

($\leftarrow$) ให้ $b(A) \subset A$

เราจะแสดงว่า A เป็นเซตปิด โดยการแสดงว่า A^c เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in A^c$ แล้ว x ไม่เป็นจุดขอบของ A

ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่งข้อความต่อไปนี้เป็นเท็จ

$$(x - \delta , x + \delta) \cap A \neq \phi \text{ และ } (x - \delta , x + \delta) \cap A^c \neq \phi$$

แต่ $x \in A^c$

ดังนั้น $(x-\delta\ ,\ x+\delta)\cap A\neq\phi$ เป็นเท็จ

นั่นคือ $(x-\delta\ ,\ x+\delta)\subset A^{c}$

เพราะฉะนั้น A^{c} เป็นเซตเปิด ■

ทฤษฎีบท 3.3.10 :

(1) A เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ $A'\subset A$

(2) A เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $A\cap b(A)=\phi$

พิสูจน์ : (1) $(\rightarrow)$ กำหนดให้ A เป็นเซตปิด และ $x\in A'$

เราจะแสดงว่า $x\in A$

สมมติ $x\notin A$

ดังนั้น $x\in A^{c}$ ซึ่ง A^{c} เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น มี $\delta>0$ ซึ่ง $(x-\delta\ ,\ x+\delta)\subset A^{c}$

นั่นคือ x ไม่เป็นจุดลิมิตของ A ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $x\in A$

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ $A'\subset A$

เราจะแสดงว่า A เป็นเซตปิด โดยแสดงว่า A^{c} เป็นเซตเปิด

ให้ $x\in A^{c}$

ดังนั้น x ไม่เป็นจุดลิมิตของ A

นั่นคือ จะมี $\delta>0$

ซึ่ง $(x-\delta\ ,\ x+\delta)\cap(A-\{x\})=\phi$

แต่ $x\notin A$

เพราะฉะนั้น

$(x-\delta\ ,\ x+\delta)\cap A=\phi$ หรือ $(x-\delta\ ,\ x+\delta)\subset A^{c}$

ทำให้เราสรุปได้ว่า

A^{c} เป็นเซตเปิด นั่นคือ A เป็นเซตปิด

(2) $(\rightarrow)$ กำหนดให้ A เป็นเซตเปิด

ให้ $x\in A$ จะมี $\delta>0$ ซึ่ง $(x-\delta\ ,\ x+\delta)\subset A$

ดังนั้น $x\notin b(A)$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $A \cap b(A) = \phi$

ให้ $x \in A$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งข้อความต่อไปนี้เป็นเท็จ

$(x - \delta , x + \delta) \cap A \neq \phi$ และ $(x - \delta , x + \delta) \cap A^c \neq \phi$

แต่ $x \in A$

ดังนั้น $(x - \delta , x + \delta) \cap A^c \neq \phi$ เป็นเท็จ

นั่นคือ $(x - \delta , x + \delta) \subset A$

เพราะฉะนั้น A เป็นเซตเปิด ■

บทนิยาม 3.3.11 : ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง **โคลเชอร์ของเซต** A **(closure of** A **)** เขียนแทนด้วย $\overline{A}$ คือเซต $A \cup A'$

ตัวอย่าง 3.3.12 : โคลเชอร์ของ $(0,1]$ คือ $[0,1]$

ถ้าให้ Q คือเซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด และ I คือเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดแล้ว

$\overline{Q} = Q, \overline{I} = I$

โคลเชอร์ของ $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right\}$ คือ $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right\} \cup \{0\}$

ทฤษฎีบท 3.3.13 : ให้ $A \subset R$ แล้ว $\overline{A}$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ : ให้ $A \subset R$

เราจะแสดงว่า $\overline{A}$ เป็นเซตปิด โดยแสดงว่า $(\overline{A})^c$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in (\overline{A})^c$

ต้องการแสดงว่า จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $(x - \delta , x + \delta) \subset (\overline{A})^c$

หรือ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $(x - \delta , x + \delta) \cap \overline{A} = \phi$

เนื่องจาก $x \notin A$ และ $x \notin A'$

โดยความหมายของจุดลิมิต

จะมี $r > 0$ ซึ่ง $(x - r , x + r) \cap (A - \{x\}) = \phi$

แต่ $x \notin A$

ดังนั้น $(x - r , x + r) \cap A = \phi$

ให้ $\delta = \frac{r}{2}$

ในการแสดงว่า $(x - \delta , x + \delta) \cap \overline{A} = \phi$

ให้ $y \in (x - \delta , x + \delta)$

เนื่องจาก $(y-\delta, y+\delta) \subset (x-r , x+r)$ ดังนั้น $y \notin A$

ดังนั้น $(y - \delta , y + \delta)$ ไม่มีสมาชิกของ A (เนื่องจาก $(x - r , x + r)$ ไม่มีสมาชิกของ A)

นั่นคือ y ไม่เป็นจุดลิมิตของ A หรือ $y \notin \overline{A}$ ■

ทฤษฎีบท 3.3.14 : ทฤษฎีบทของไฮนี- บอเรล (Heine-Borel Theorem)

ให้ $A \subset R$ ถ้า A เป็นเซตปิดซึ่งมีขอบเขต แล้ว A เป็นเซตคอมแพกต์

พิสูจน์ : ดูการพิสูจน์จาก [6] หน้า 67 ■

ทฤษฎีบท 3.3.15 : ถ้า A เป็นเซตคอมแพกต์ แล้ว A เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ A เป็นเซตคอมแพกต์

เราจะแสดงว่า ถ้า A ไม่เป็นเซตปิดหรือ A ไม่เป็นเซตมีขอบเขตอย่างใดอย่างหนึ่งแล้ว เซต A จะไม่เป็นเซตคอมแพกต์

กรณีที่ 1 ถ้า A ไม่เป็นเซตมีขอบเขต

ให้ $I_n = (-n , n)$, $n = 1 , 2 ,3,...$ แล้ว $\{ I_n : n \in I^+ \}$ เป็นตัวคลุมเปิดสำหรับ A

ถ้า $\{ I_n : n \in I^+ \}$ มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด สมมุติเป็น , $\{I_{n_1}\ I_{n_2},, \quad I_{n_k}\}$ เมื่อ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$

เนื่องจาก A ไม่เป็นเซตมีขอบเขต ดังนั้น มี $x \in A$ ซึ่ง $|x| > n_k$

และสรุปได้ว่า $x \notin \bigcup_{j=1}^{k}(-n_j , n_j)$ เป็นข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 2 A ไม่เป็นเซตปิด

ดังนั้นจะมี จุดลิมิต x ของ A ซึ่ง $x \notin A$

ให้ $I_n = \left(-\infty, x-\frac{1}{n}\right) \cup \left(x+\frac{1}{n},\infty\right)$, $n \in I^+$

เราจะแสดงว่า $\{ I_n : n \in I^+ \}$ เป็นตัวคลุมเปิดสำหรับ A

ให้ $a \in A$

<u>**กรณี 1**</u> $a > x$

เลือก $n \in I^+$ ซึ่ง $\frac{1}{n} < \frac{a-x}{2}$

ดังนั้น $a \in \left(x+\frac{1}{n}, \infty\right)$

<u>**กรณี 2**</u> $a < x$

เลือก $n \in I^+$ ซึ่ง $\frac{1}{n} < \frac{x-a}{2}$

ดังนั้น $a \in \left(-\infty, x-\frac{1}{n}\right)$

ถ้า $\{ I_n : n \in I^+ \}$ มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด สมมุติเป็น

$\{I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_k}\}$ โดยที่ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$

เนื่องจาก x เป็นจุดลิมิตของ A

ดังนั้น มี $y \in \left(x-\frac{1}{n_k}, x+\frac{1}{n_k}\right) \cap A$ แต่ $y \notin \bigcap_{j=1}^{k} I_{n_j}$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น A ไม่เป็นเซตคอมแพกต์ ■

ทฤษฎีบท 3.3.16 : A เป็นเซตคอมแพกต์ก็ต่อเมื่อ ทุกเซตอนันต์ $B \subset A$ มีจุดลิมิตอยู่ใน A

พิสูจน์ : $(\longrightarrow)$ ให้ A เป็นเซตคอมแพกต์

และให้ $B \subset A$ และ B เป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก A เป็นเซตคอมแพกต์ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.15 A เป็นเซตมีขอบเขต

เพราะฉะนั้น B เป็นเซตอนันต์ซึ่งมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ B มีจุดลิมิต สมมติเป็น p

และ p จะเป็นจุดลิมิตของ A ด้วย

แต่ A เป็นเซตปิด เพราะฉะนั้น $p \in A$

$(\longleftarrow)$ กำหนดให้ A เป็นเซตซึ่งทุกสับเซตอนันต์ของ A มีจุดลิมิตอยู่ใน A

<u>**กรณี 1**</u> สมมติ A ไม่เป็นเซตปิด

ดังนั้น จะมีจุดลิมิต x ของ A ซึ่ง $x \notin A$

สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

จะได้ว่า $$\left(x-\frac{1}{n},\, x+\frac{1}{n}\right)\cap\left(A-\{x\}\right)\neq\phi$$

เลือก $x_1 \in (x-1,\ x+1)\cap(A-\{x\})$

โดยนิยาม 2.1 เราสามารถเลือก

$$x_1 \neq x_2 \quad \in \quad \left(x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)\cap\left(A-\{x\}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} \neq x_n \quad \in \quad \left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)\cap\left(A-\{x\}\right)$$

$$\vdots$$

เราได้ว่า $B = \{x_n \mid n \in I^+\}$ เป็นสับเซตอนันต์ของ A

และ x เป็นจุดลิมิตของ B

โดยสิ่งที่กำหนดให้ จะได้ว่า $x \in A$ ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น A เป็นเซตปิด

<u>**กรณี 2**</u> สมมติ A ไม่มีขอบเขต

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ จะมี $x_n \in A$ ซึ่ง $|x_n| > n$ และ $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n \neq \dots$

ดังนั้น $\{x_n \mid n \in I^+\}$ เป็นสับเซตอนันต์ของ A ซึ่งไม่มีจุดลิมิต

เราเห็นได้ว่า เกิดข้อขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้

ดังนั้น A มีขอบเขต

โดย ทฤษฎีบทของ ไฮนี-บอเรล สรุปได้ว่า A เป็นเซตคอมแพกต์ ■

ทฤษฎีบท 3.3.17 : ให้ $A \subset R$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) A เป็นเซตคอมแพกต์

(2) A เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

(3) ถ้า $B \subset A$ และเป็นเซตอนันต์แล้ว B มีจุดลิมิตอยู่ใน A

(4) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน A แล้ว $\{x_n\}$ มีลำดับย่อย ซึ่งลู่เข้าสู่จุดใน A

พิสูจน์ : สำหรับ (1) $\leftrightarrow$ (2) เป็นผลมาจาก ทฤษฎีบท 3.3.15 และ ทฤษฎีบท 3.3.14

สำหรับ (1) $\leftrightarrow$ (3) เป็นผลมาจาก ทฤษฎีบท 3.3.16

สำหรับ (2) $\leftrightarrow$ (3) เป็นจริงจาก (1) $\leftrightarrow$ (2) และ (1) $\leftrightarrow$ (3)

สำหรับ (3) $\leftrightarrow$ (4) เราดำเนินการพิสูจน์ดังนี้

(3) $\rightarrow$ (4)

ให้ $\{ x_n \}$ เป็นลำดับใน A และให้

$$B = \{ x_n : n \in I^+ \}$$

__กรณี 1__ B เป็นเซตจำกัด

ดังนั้นจะมี จำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว $x_n = c$

ให้ $x_{n_k} = x_{N+1}$ ทุก $k \in I^+$

ดังนั้น $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ $c \in A$

__กรณี 2__ B เป็นเซตอนันต์

ดังนั้น B มีจุดลิมิตอยู่ใน A สมมุติเป็น a

เลือก $y_1 \in (a - 1,\ a + 1) \cap (B - \{a\})$

โดยบทนิยาม 2.1 เราสามารถเลือก

$$y_1 \neq y_2 \in \left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right) \cap (B - \{a\})$$

$$y_2 \neq y_3 \in \left(a-\frac{1}{3}, a+\frac{1}{3}\right) \cap (B - \{a\})$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} \neq y_n \in \left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right) \cap (B - \{a\})$$

$$\vdots$$

เห็นได้ว่า $\{ y_n \}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{ x_n \}$

ต้องการแสดงว่า $\{ y_n \}$ ลู่เข้าสู่ a

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$

ทุก $n > N$ เราได้ $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ และ $|y_n - a| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

ดังนั้น ลำดับ $\{y_n\}$ ลู่เข้าสู่จุดใน A

(4) $\rightarrow$ (3)

ให้ $B \subset A$ และ B เป็นเซตอนันต์

ต้องการแสดงว่า B มีจุดลิมิตอยู่ใน A

เพราะว่า $B \neq \phi$ เลือก $x_1 \in B$

เพราะว่า B เป็นเซตอนันต์ เลือก $x_2 \in B$ ซึ่ง $x_1 \neq x_2$

โดยสิ่งที่กำหนดให้ $\{x_n\}$ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ซึ่ง $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ $a \in A$

เราจะแสดงว่า a เป็นจุดลิมิตของ B

ให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องแสดงว่า $((a - \varepsilon, a + \varepsilon) - \{a\}) \cap B \neq \phi$

เนื่องจาก a เป็นลิมิตของ ลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$

จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $k > N$ แล้ว $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$

พิจารณา $k = N + 1$, $r = N + 2$

ดังนั้น $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ และ $|x_{n_r} - a| < \varepsilon$

แต่ $x_{n_k} \neq x_{n_r}$ ดังนั้น ค่าใดค่าหนึ่งของ x_{n_k} หรือ x_{n_r} มีค่าไม่เท่ากับ a

นั่นคือ $((a - \varepsilon, a + \varepsilon) - \{a\}) \cap B \neq \phi$

ดังนั้น a เป็นจุดลิมิตของ B ■

สำหรับ $(1) \leftrightarrow (4)$ เป็นจริงจาก $(1) \leftrightarrow (3)$ และ $(3) \leftrightarrow (4)$

สำหรับ $(2) \leftrightarrow (4)$ เป็นจริงจาก $(1) \leftrightarrow (2)$ และ $(1) \leftrightarrow (4)$ ■

ข้อสังเกต 3.3.18 : ช่วงปิด $[a,b]$ เป็นเซตคอมแพกต์

ทฤษฎีบท 3.3.19 : ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า A เป็นสับเซตคอมแพกต์ ของ X แล้ว $f(A)$ เป็นเซตคอมแพกต์

พิสูจน์ : ให้ A เป็นสับเซตคอมแพกต์ ของ X แล้ว $f(A) \subset Y$

ให้ $\mathbf{C} = \{ I_\alpha : \alpha \in I \}$ เป็นตัวคลุมเปิดของ $f(A)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดย ทฤษฎีบท 3.2.2.9

เราได้ว่า $f^{-1}(I_\alpha)$ เป็นเซตเปิดเทียบกับ X

เราจะแสดงว่า $\{ f^{-1}(I_\alpha) : \alpha \in I \}$ เป็นตัวคลุมเปิดสำหรับ A

ให้ $x_0 \in A$ แล้ว $f(x_0) \in f(A)$ ดังนั้น $f(x_0) \in I_\alpha$ สำหรับบาง $\alpha \in I$

นั่นคือ $x_0 \in f^{-1}(I_\alpha)$ สำหรับบาง $\alpha \in I$

เนื่องจาก A เป็น เซตคอมแพกต์ ดังนั้น $\{ f^{-1}(I_\alpha) \mid \alpha \in I \}$ มี ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด

สมมติเป็น $\mathbf{D} = \{ f^{-1}(I_1), \ldots, f^{-1}(I_n) \}$

เราจะแสดงว่า $\{ I_1, \ldots, I_n \}$ เป็นตัวคลุมเปิดย่อยจำกัดสำหรับ **C**

ให้ $y_0 \in f(A)$ แล้วจะมี $x_0 \in A$ ซึ่ง $f(x_0) = y_0$

แต่ $x_0 \in f^{-1}(I_j)$ สำหรับบาง $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

นั่นคือ $y_0 \in I_j$

ดังนั้น $\{ I_1, \ldots, I_n \}$ เป็นตัวคลุมเปิดย่อยจำกัดสำหรับ **C**

เพราะฉะนั้น $f(A)$ เป็นเซตคอมแพกต์ ■

3.4 ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (Uniform Continuity)

บทนิยาม 3.4.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $A \subset R$ เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน** A **(uniformly continuous on** A **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $x, y \in A$ และ $|x - y| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ข้อแตกต่างระหว่างความต่อเนื่อง กับความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ จะต่างกันที่ ควาต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ค่าของ δ จะขึ้นกับ ε เพียงอย่างเดียว จะไม่ขึ้นกับจุด $x \in A$ (แต่ความต่อเนื่อง ค่าของ δ จะขึ้นกับ $x \in A$ และค่าของ ε)

ฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งต่อเนื่องบนช่วง (a,b) อาจจะไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วงเดียวกันี้ แต่อาจจะต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วงอื่นได้ ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.4.2 : ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง (0 , 1) แต่จะต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง [1/2 , 1)

พิสูจน์ : เราทราบจากตัวอย่าง 3.2.2.2 แล้วว่า f ต่อเนื่องบนช่วง (0 , 1)

สมมุติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง (0 , 1)

ให้ $\varepsilon > 0$

ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < \delta < 1$

และสอดคล้องว่า

ถ้า $x , y \in (0,1)$และ $|x - y| < \delta$ แล้ว$| f(x) - f(y) | < \varepsilon$

พิจารณา $x = \delta$ และ $y = \dfrac{\delta}{1+\varepsilon}$

แล้ว

$$x , y \in (0,1)$$

และ

$$|x - y| = \left|\delta - \frac{\delta}{1+\varepsilon}\right| = \delta\left|1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \bullet \delta \prec \delta$$

ดังนั้น

$$| f(x) - f(y) | < \varepsilon$$

แต่เพราะว่า

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

นั่นคือ f ไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง (0 , 1)

ต่อไปจะแสดงว่า f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง [1/2 , 1)

ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ สำหรับ $x , y \in [1/2, 1)$ ซึ่ง $|x - y| < \delta$

จะได้ว่า

$$| f(x) - f(y) | = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

$$= \frac{|y-x|}{|xy|} < 4\ \delta = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

จะได้ว่า $| f(x) - f(y) | < \varepsilon$

นั่นคือ f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง [1/2 , 1) ■

ตัวอย่าง 3.4.3 : จะแสดงว่า $f(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $(-\infty, \infty)$ แต่จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $[a,b]$

พิสูจน์ : สมมุติให้ f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ บนช่วง $(-\infty, \infty)$

พิจารณา $\varepsilon = 1$

ดังนั้นมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $|x - y| < \delta$ แล้ว $|x^2 - y^2| < 1$

ให้ $x = \dfrac{1}{\delta}$ และ $y = x + \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$

จะได้

$$|x - y| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

ดังนั้น

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| < 1$$

พิจารณา

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| = \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $(-\infty, \infty)$

ต่อไปจะแสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $[a,b]$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2b}$

สำหรับ $x, y \in [a,b]$ ซึ่ง $|x - y| < \delta$ จะได้ว่า

$$|x^2 - y^2| = |x + y||x - y|$$

$$< 2b|x - y| < 2b\delta = 2b \cdot \frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon$$

จะได้ว่า $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

นั่นคือ $f(x) = x^2$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $[a,b]$ ■

ทฤษฎีบท 3.4.4 : ถ้า A เป็นเซตคอมแพกต์ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน A

พิสูจน์ : กำหนดให้ A เป็นเซตคอมแพกต์ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A

ให้ $\varepsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า

ถ้า $x, y \in A$ และ $|x - y| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ให้ $x \in A$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x

ดังนั้น จะมี $\delta(x)$ ซึ่งถ้า $y \in A$ และ $|x - y| < \delta(x)$ แล้ว

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้ $A_x = \left(x - \frac{\delta(x)}{2},\ x + \frac{\delta(x)}{2} \right)$ แล้ว

$\mathbf{C} = \{ A_x \mid x \in A \}$ เป็นตัวคลุมเปิด ของ A

เนื่องจาก A เป็น เซตคอมแพกต์ ดังนั้น $\mathbf{C}$ มี ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด

สมมุติเป็น $\mathbf{D} = \{A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}\}$

ต่อไปขอเขียน δ_i แทน $\delta(x_i)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$

พิจารณา $x, y \in A$ ซึ่ง $|x - y| < \delta \le \frac{\delta_i}{2}$ สำหรับ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

เนื่องจาก $\mathbf{D}$ เป็นตัวคลุมเปิดสำหรับ A

ดังนั้นมี x_i โดยที่ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ซึ่ง $x \in A_{x_i}$ และจะได้ว่า $|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$

เราจะแสดงว่า $|x_i - y| < \delta_i$ ได้ดังนี้

$$|x_i - y| = |x_i - x + x - y| \le |x_i - x| + |x - y|$$
$$< \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i$$

ดังนั้น

$$|f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

และสรุปได้ว่า $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)|$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \blacksquare$$

ข้อสังเกต 3.4.5 : (1) ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $[a,b]$

(2) ถ้า f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้วมี $M>0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$

บทที่ 4
การประยุกต์ของฟังก์ชันต่อเนื่องในแคลคูลัส
(Applications of Continuous Functions in Calculus)

ในบทนี้เราจะศึกษาผลที่ตามมาของฟังก์ชันต่อเนื่อง กล่าวคือ เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่สำคัญในแคลคูลัส เช่น ทฤษฎีบทค่ากลาง ทฤษฎีบทค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย และทฤษฎีบทอื่นๆ ซึ่งทฤษฎีบทเหล่านี้เป็นผลที่ได้มาจากการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นอกจากนี้ เราได้ศึกษาผลที่สำคัญอีกประการหนึ่งของฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือการถ่ายทอดความต่อเนื่องไปสู่ฟังก์ชันอินเวอร์ส ถ้าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันโมโนโทนและเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

4.1 ทฤษฎีบทหลัก (Fundamental Theorems)

ทฤษฎีบท 4.1.1 : ทฤษฎีบทค่ากลาง (Intermediate Value Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f(a) \neq f(b)$ ถ้า α เป็นจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f(c) = \alpha$

พิสูจน์ : เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยแยกพิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $f(a) > f(b)$

ดังนั้น $f(b) < \alpha < f(a)$

นิยามฟังก์ชัน g บน $[a,b]$ ดังนี้

$$g(x) = f(x) - \alpha$$

เห็นได้ว่า

$$g(a) = f(a) - \alpha > 0 \text{ และ } \quad g(b) = f(b) - \alpha < 0$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.3.3 จะมี $c \in (a, b)$

ซึ่ง $g(c) = f(c) - \alpha = 0$ นั่นคือ $f(c) = \alpha$

กรณีที่ 2 : $f(a) < f(b)$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกับ กรณีที่ 1 ■

ตัวอย่าง 4.1.2 : จงแสดงว่า $f(x) = 3x^3 + \sin x - 1$ มีรากอยู่ ระหว่าง -1 และ 1

พิสูจน์ : เนื่องจาก f ต่อเนื่องบนช่วง [-1 , 1] และ

$$f(1) = 3 + \sin 1 - 1 = 2 + \sin 1 > 0$$

$$f(-1) = -3 - \sin 1 - 1 = -4 - \sin 1 < 0$$

ดังนั้น เมื่อให้ $\alpha = 0$ ในทฤษฎีบท 3.2.3.3

จะได้ว่ามี $c \in (-1, 1)$ ซึ่ง $f(c) = 0$

แต่ $c \neq -1$ และ $c \neq 1$

นั่นคือ $f(x) = 3x^3 + \sin x - 1$ มีรากอยู่ระหว่าง -1 และ 1 ■

ทฤษฎีบท 4.1.3 : ทฤษฎีบทค่าปลายสุด (Extreme Value Theorem)

ให้ $A \subset R$ และ $f : A \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า A เป็นเซตคอมแพกต์ แล้วจะมี $x_0, x_1 \in A$ ซึ่งสอดคล้องว่า $f(x_0) \geq f(x)$, $f(x_1) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in A$ (นั่นคือ f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดใน A)

พิสูจน์ : เราจะแสดงการพิสูจน์เฉพาะกรณีที่มี $x_0 \in A$ ซึ่งสอดคล้อง

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in A$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.17 และทฤษฎีบท 3.3.15 เราสรุปได้ว่า $f(A)$ มีขอบเขต

ดังนั้น โดยสัจพจน์ของความบริบูรณ์ $f(A)$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

สมมุติเป็น y_0 สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

เนื่องจาก y_0 ไม่เป็นขอบเขตบนของ $f(A)$ ดังนั้นมี $y_0 \in A$ ซึ่ง

$$y_0 - \frac{1}{n} < y_n \leq y_0 + \frac{1}{n}$$

เพราะฉะนั้น $\{y_n\}$ เป็นลำดับใน $f(A)$

และจะได้ว่า $\{y_n\}$ ลู่เข้าสู่ y_0

สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ จะมี $x_n \in A$ ซึ่ง $f(x_n) = y_n$

นั่นคือ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน A โดยทฤษฎีบท 3.3.17

จะได้ว่า มี $x_0 \in A$ และลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ x_0

เราจะแสดงว่า $f(x_0) = y_0$

โดยทฤษฎีบท 3.2.1.3 เราได้ว่า

$$f(x_0) = f(\lim x_{n_k}) = \lim f\left(x_{n_k}\right) = \lim\left(y_{n_k}\right) = y_0$$

ให้ $x \in A$ เนื่องจาก y_0 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $f(A)$ ดังนั้น

$$y_0 \geq f(x)$$

แต่ $f(x_0) = y_0$

นั่นคือ $f(x_0) \geq f(x)$ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลที่ได้จาก ทฤษฎีบทค่าปลายสุด ซึ่งเราประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทนี้มากในแคลคูลัส

ทฤษฎีบท 4.1.4 : ทฤษฎีบทค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (The Max - Min Theorem)

ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว จะมี $x_0, x_1 \in [a, b]$ ซึ่งสอดคล้องว่าสำหรับทุก $x \in [a,b]$ เราได้

(1) $f(x_0) \geq f(x)$

(2) $f(x_1) \leq f(x)$

(นั่นคือ f มีค่าสูงสุดและมีค่าต่ำสุดบน $[a,b]$)

บทนิยาม 4.1.5 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง (a,b) และให้ $c \in (a,b)$ จะกล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)** ที่ c ถ้า

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

หาค่าได้ เรียกลิมิตว่า **อนุพันธ์ (derivative)** ของ f ที่ c เขียนแทนโดย $f'(c)$

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน (a,b) แล้ว เรากล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้ (differentable)** บน (a,b)

ข้อสังเกต 4.1.6 : ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงเปิด (a,b) และให้ $c \in (a,b)$ แล้วจำนวนจริง L เป็นอนุพันธ์ ของ f ที่ c ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < | x - c | < \delta$ แล้ว $\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$

บทนิยาม 4.1.7 : กำหนดให้ f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) ถ้ามี $x_0 \in (a,b)$ และ $x_1 \in (a,b)$ ซึ่งสอดคล้องว่า $f(x_0) \geq f(x)$, $f(x_1) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้ว เรียก x_0 และ x_1 ว่า **จุดมากสุด (maximum point)** และ **จุดน้อยสุด (minimun point)** ของ f บน (a,b) ตามลำดับ

นอกจากนี้เรียก x_0 หรือ x_1 ว่า**จุดปลายสุด (extreme point)** ของ f และเรียกค่า $f(x_0)$ หรือ $f(x_1)$ ว่า**ค่าปลายสุด (extreme value)** ของ f

ทฤษฎีบท 4.1.8 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วงเปิด (a,b) และ x_0 เป็นจุดปลายสุดของ f ถ้า f หาอนุพันธ์ที่จุด x_0 ได้ แล้ว $f'(x_0)=0$

พิสูจน์ : ดูการพิสูจน์จาก [5] หน้า 96 ■

ทฤษฎีบท 4.1.9 : ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ f หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้วจะมีจุด $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $f'(c)=0$

พิสูจน์ : โดย ทฤษฎีบท 4.1.5 เนื่องจาก f มีค่ามากสุดและค่าน้อยสุดบน $[a,b]$ ให้ค่ามากสุดเป็น M และค่าน้อยสุดเป็น m โดยที่ $M = f(x_1)$ และ $m = f(x_2)$

<u>**กรณีที่ 1**</u> $M=m$ กรณีนี้เราได้ว่า f เป็นฟังก์ชันคงค่าบน $[a,b]$ และ $f'(x)=0$ ทุก $x \in (a,b)$

<u>**กรณีที่ 2**</u> $M \neq m$ ดังนั้น $f(a) \neq M$ หรือ $f(a) \neq m$

ถ้า $f(x_1) \neq f(a)$ และ $x_1 \in (a,b)$

โดย ทฤษฎีบท 4.1.8 จะได้ $f'(x_1)=0$

ถ้า $f(x_2) \neq f(a)$ และ $x_2 \in (a,b)$

โดย ทฤษฎีบท 4.1.8 จะได้ $f'(x_2)=0$

ดังนั้น การพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ตัวอย่าง 4.1.10 : จงใช้ทฤษฎีบทของโรลล์ แสดงว่า cot $x = x$ มีคำตอบ ในช่วงเปิด $(0, \pi/2)$

พิสูจน์ : สำหรับทุก $x \in [0, \pi/2]$ ให้ $f(x) = x \cos x$

ดังนั้น จะได้ $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 0$

นอกจากนี้ f มีความต่อเนื่องบน $[0, \pi/2]$ และ f มีอนุพันธ์ บน $(0, \pi/2)$

โดยทฤษฎีบทของโรลล์ จะมี $c \in (0, \pi/2)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$

แต่ $f'(x) = -x \sin x + \cos x$

$= \cos x - x \sin x$

ดังนั้น

$$f'(c) = \cos c - c \sin c = 0$$

หรือ

$$\cos c = c \sin c$$

นั่นคือ สมการ cot $x = x$ มีคำตอบในช่วง $(0, \pi/2)$ ■

ทฤษฎีบท 4.1.11 : ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean Value Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ f หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) แล้ว จะมี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

พิสูจน์ : ให้ $L(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งกราฟของ $L(x)$ ผ่านจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ แล้ว $L(x)$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้

ให้ $F(x) = f(x) - L(x)$ แล้ว F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

เนื่องจากเส้นตรง L ผ่านจุด $(a, f(a))$ ดังนั้น $L(a) = f(a)$

และ $F(a) = f(a) - L(a) = f(a) - f(a) = 0$

ทำนองเดียวกัน เนื่องจากเส้นตรง L ผ่านจุด $(b, f(b))$ แล้ว $L(b) = f(b)$

$$F(b) = f(b) - L(b) = f(b) - f(b) = 0$$

เพราะฉะนั้น $F(x)$ สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ นั่นคือ

มี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $F'(c) = 0$

ดังนั้น $f'(c) - L'(c) = 0$

แต่ L เป็นเส้นตรง ซึ่งมี ความชัน เท่ากับ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

เพราะฉะนั้น
$$0 = F'(c) = f'(c) - L'(c)$$
$$= f'(c) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

จึงสรุปได้ว่า $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ■

ตัวอย่าง 4.1.12 : จุดคงค่า (fixed point) ของฟังก์ชัน f คือจุด d ซึ่ง $f(d) = d$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้และ $f'(x) < 1$ ทุก $x \in R$ แล้ว f จะมีจุดคงค่าอย่างมาก 1 จุด

พิสูจน์ : ให้ a, b เป็นจุดคงค่าของ f ซึ่ง $a < b$

โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ เพราะฉะนั้น f จะมีจุดคงค่าอย่างมาก 1 จุด ■

ทฤษฎีบท 4.1.13 : ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยวางนัยทั่วไป (Generalized Mean Value Theorem)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) แล้ว จะมีจุด $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$

พิสูจน์ : ให้ $h(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)\,[f(b) - f(a)]$

ดังนั้น $h(x)$ จะต่อเนื่องบน $[a,b]$

เพราะว่า f และ g หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b)

ดังนั้น h หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) ด้วย

จาก $h(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)\,[f(b) - f(a)]$

จะได้ $h(a) = f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)\,[f(b) - f(a)]$
$$= f(a)\,g(b) - g(a)\,f(b)$$

$$h(b) = f(b)\,[\,g(b) - g(a)\,] - g(b)\,[\,f(b) - f(a)\,]$$
$$= -\,f(b)\;g(a) \;+\; g(b)\;f(a)$$
$$= \;h(a)$$

โดยทฤษฎีบทของโรลล์ จะมี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $h'(c) = 0$

ดังนั้น $h'(c) = f'(c)\,[g(b) - g(a)] - g'(c)\,[f(b) - f(a)] = 0$

นั่นคือ $[\,f(b) - f(a)\,]\,g'(c) = [\,g(b) - g(a)\,]\,f'(c)$ ■

ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยวางนัยทั่วไป จะนำไปใช้ใน กฎของโลปิตาล และจะขอกล่าวถึงโดยขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.1.14: กฎของโลปิตาล (L'H$\hat{o}$ pital's Rule)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) ซึ่ง $g'(x) \neq 0$ บน (a,b)

(1) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

(2) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

พิสูจน์ : ดูจาก [5] หน้า 112 ■

ข้อสังเกต 4.1.15 : ทฤษฎีบท 4.1.14 ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีลิมิตต่อไปนี้

$x \to a^-$, $x \to a$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

ตัวอย่าง 4.1.16 : จงใช้กฎของโลปิตาลประยุกต์หาค่า $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan x}$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $y = (\sin x)^{\tan x}$ โดยที่ $0 < x < \pi$ และ $x \neq \dfrac{\pi}{2}$

สำหรับแต่ละ $x \in (0, \pi)$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ เราได้

$$\ln y = (\tan x)(\ln \sin x) = \frac{(\sin x)(\ln \sin x)}{\cos x}$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \lim_{x\to\pi/2} \ln y = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\cos x}$$

เราใช้กฎของโลปิตาลหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\ln \sin x}{\cos x}$

$$\lim_{x\to\pi/2} \ln \sin x = \lim_{x\to\pi/2} \cos x = 0$$

และจะได้ว่า

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\cos x} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{d}{dx}\ln \sin x}{\frac{d}{dx}\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x}{-\sin x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = \lim_{x\to\pi/2} -\cos x = 0$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\pi/2} \ln y = 0$

และจะได้ว่า $\ln \lim\limits_{x\to\pi/2} y = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\pi/2} y = 1$ หรือ $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan x} = 1$ ■

ตัวอย่าง 4.1.17 : จงใช้กฎของโลปิตาลประยุกต์หาค่า $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{\ln x}{x}}$

พิสูจน์ : สำหรับแต่ละ $x > 2$ กำหนดให้ $y = x^{\frac{\ln x}{x}}$

ดังนั้น $\ln y = \dfrac{\ln x}{x} \ln x = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)^2}{\frac{d}{dx}x} \qquad = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}2\ln x}{\frac{d}{dx}x} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} \quad = \quad 0$$

นั่นคือ $\lim_{x\to\infty} \ln y \;=\; 0$

และจะได้ว่า $\ln \lim_{x\to\infty} y = 0$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} y = 1$ หรือ $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{\ln x}{x}} = 1$ ■

4.2 ฟังก์ชันโมโนโทนและฟังก์ชันอินเวอร์ส (Monotone and Inverse Functions)

ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงว่าฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งเป็นฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้นหรือโมโนโทนลดลง จะถ่ายทอดความต่อเนื่องไปสู่ฟังก์ชันอินเวอร์ส

บทนิยาม 4.2.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ $D(f)$ **ลิมิตของฟังก์ชัน** f **เมื่อ** x **เข้าใกล้** x_0 **มีค่าเป็นบวกอนันต์ (limit of** f **as** x **approaches** x_0 **is** ∞ **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - x_0| < \delta$ และ $x \in D(f)$ แล้ว $f(x) > M$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

ในทำนองเดียวกัน เรานิยาม ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 มีค่าเป็นลบอนันต์ ถ้าสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - x_0| < \delta$ และ $x \in D(f)$ แล้ว $f(x) < -M$ และจะเขียนแทนความหมายนี้โดย $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 4.2.2 : ให้ $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ แล้ว $D(f) = \{ x \mid x \neq 1 \}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$

พิสูจน์ : ให้ $M>0$

ถ้า $0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ แล้ว

เราจะแสดงว่า $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}>M$ เมื่อ $0<|x-1|<\delta$ สำหรับบางค่าของ δ

เลือก $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}>0$

ดังนั้น เมื่อ $0<|x-1|<\delta$ แล้ว

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ หรือ } \frac{1}{(x-1)^2}>M$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ ■

บทนิยาม 4.2.3 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $D(f) \cap (k, \infty) \neq \varnothing$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง k แล้ว จะกล่าวว่า **ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ ∞ มีค่าเป็น L (limit of f as x approaches to ∞ is L)** ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งถ้า $x>N$ และ $x\in D(f)$ แล้ว $|f(x)-L|<\varepsilon$

เขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$

ทำนองเดียวกัน เรานิยาม ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ $-\infty$ มีค่าเป็น L ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งถ้า $x<-N$ และ $x\in D(f)$ แล้ว $|f(x)-L|<\varepsilon$ และเขียนแทนความหมายนี้โดย $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=L$

ตัวอย่าง 4.2.4 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon>0$ เราต้องการหา $N>0$ ซึ่งสอดคล้องว่า

ถ้า $x>N$ และ $x\in D(f)$ แล้ว $|f(x)-L|<\varepsilon$

ถ้า $\varepsilon < 2$ แล้ว $\frac{2}{\varepsilon}-1 \;>\; 0$ และให้ $N=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$

ดังนั้น $\quad \frac{2}{N^2-1}=\varepsilon$

นั่นคือ

$$|f(x)-1|=\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right| \;=\; \frac{2}{x^2+1}<\frac{2}{N^2+1}=\varepsilon$$

ถ้า $\varepsilon \geq 2$ เมื่อเลือก $N \geq 1$ แล้วสำหรับทุก $x \geq N$

เราได้ว่า

$$|f(x)-1|=\left|\frac{2}{x^2+1}\right| \;<\; \frac{2}{N^2+1} \;<\; 1 \;<\; \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$ ■

บทนิยาม 4.2.5 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $D(f)\cap(M\;,\infty)\neq\varnothing$ สำหรับแต่ละ M แล้ว

ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ ∞ มีค่าเป็น ∞ (limit of f as x approaches ∞ is ∞)
ถ้าสำหรับแต่ละ $K>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งถ้า $x>N$ และ $x\in D(f)$ แล้ว $f(x)>K$

เขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

ทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยาม

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $K>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งถ้า $x>N$ แล้ว $f(x)<-K$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $K>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งถ้า $x<-N$ แล้ว $f(x)>K$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $K>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งถ้า $x<-N$ แล้ว $f(x)<-K$

ตัวอย่าง 4.2.6 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

พิสูจน์ : ให้ $K>0$ จะต้องหา N ซึ่งถ้า $x>N$ แล้ว $\sqrt{x}>K$

แต่ ถ้า $x>K^2$ แล้ว $\sqrt{x}>K$

ดังนั้น เลือก $N=K^2$ จะได้ $f(x)>K$

นั่นคือ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ ■

บทนิยาม 4.2.7 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ $D(f) \cap [x_0, \infty)$ แล้ว **ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 ทางขวามีค่าเป็น L (limit of f as x approaches x_0 from the right is L)** ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < x - x_0 < \delta$ และ $x \in D(f)$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

บทนิยาม 4.2.8 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ $(-\infty, x_0] \cap D(f)$ เราจะเรียก **ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 ทางซ้าย มีค่าเป็น L (limit of f as x approaches x_0 from the left is L)** ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < x_0 - x < \delta$ และ $x \in D(f)$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

ตัวอย่าง 4.2.9 : ให้ $f(x) = [x]$ เมื่อ $[x] = n$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $n \le x < n+1$

จงแสดงว่า (1) $\lim\limits_{x \to 3^-} [x] = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to 3^+} [x] = 3$

พิสูจน์ : (1) ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{1}{2}$

ดังนั้นสำหรับทุก x ซึ่ง $0 < 3 - x < \delta = \dfrac{1}{2}$

แล้วได้ว่า

$$f(x) = 2 \quad \text{และ} \quad |f(x) - 2| = 0 < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 3^-} [x] = 2$

(2) ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{1}{2}$

ดังนั้น สำหรับทุก x ซึ่ง $0 < x - 3 < \delta = \dfrac{1}{2}$

แล้วได้ว่า $f(x) = 3$ และ $|f(x) - 3| = 0 < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 3^+} [x] = 3$ ■

บทนิยาม 4.2.10 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $x_0 \in D(f)$ เราจะกล่าวว่า **ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด x_0 (f is continuous from the right at x_0)** ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 \leq x - x_0 < \delta$ และ $x \in D(f)$ แล้ว $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

บทนิยาม 4.2.11 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $x_0 \in D(f)$ เราจะกล่าวว่า **ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด x_0 (f is continuous from the left at x_0)** ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 \leq x_0 - x < \delta$ และ $x \in D(f)$ แล้ว $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ข้อสังเกต 4.2.12 : จากบทนิยาม 3.2.1.1 บทนิยาม 4.2.10 และ บทนิยาม 4.2.11 จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทางซ้าย ที่จุด x_0 และ f ต่อเนื่องทางขวา ที่จุด x_0 โดยใช้ผลจากหัวข้อ 3.1 เราจะได้ทฤษฎีต่อไปนี้ โดยจะขอกล่าวโดยละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.2.13 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $x_0 \in D(f)$ แล้ว f ต่อเนื่องทางขวา (ทางซ้าย) ที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับ $\{ x_n \} \subset D(f)$ ซึ่ง $x_n \geq x_0$ ($x_n \leq x_0$) และ $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ x_0 แล้ว $\{ f(x_n) \}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$

ทฤษฎีบท 4.2.14 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $x_0 \in D(f)$ แล้ว f ต่อเนื่องทางขวา (ทางซ้าย) ที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับแบบลดลง (แบบเพิ่มขึ้น) $\{ x_n \} \subset D(f)$ ซึ่ง $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ x_0 แล้ว $\{ f(x_n) \}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$

ทฤษฎีบท 4.2.15 : ให้ f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนบนช่วงเปิด (a,b) แล้ว $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ หาค่าได้ สำหรับแต่ละ $x_0 \in (a,b)$

พิสูจน์ : เราจะพิสูจน์ในกรณี ที่ f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลง

ให้ $x_0 \in (a,b)$

เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ หาค่าได้

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลง

ถ้า $a < x < x_0$ แล้ว $f(x) \le f(x_0)$

ดังนั้น

$f(x_0)$ เป็นขอบเขตบน ของเซต $A = \{ f(x) \mid a < x < x_0 \}$

โดยสัจพจน์ของความบริบูรณ์ A มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด สมมุติ คือ α

เราจะแสดงว่า $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\alpha - \varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ A

ดังนั้นมี $x_1 \in (a, x_0)$ ซึ่ง $\alpha - \varepsilon < f(x_1) \le \alpha$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x_1 < x < x_0$ เราได้ว่า

$f(x_1) \le f(x)$

แต่ $\alpha - \varepsilon < f(x_1)$ ดังนั้น $\alpha - \varepsilon < f(x)$

เนื่องจาก α เป็นขอบเขตบนของ A

$f(x) \le \alpha < \alpha + \varepsilon$

เพราะฉะนั้น

$\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$

นั่นคือ $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

ดังนั้น $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ หาค่าได้

เนื่องจาก $B = \{ f(x) : x \in (x_0, b) \}$ มีขอบเขตล่าง ดังนั้น

B มีขอบเขตล่างค่ามากสุด สมมุติ คือ β เราจะแสดงว่า

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\beta + \varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ B

ดังนั้นมี $x_1 \in (x_0, b)$ ซึ่ง $f(x_1) < \beta + \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in (x_0, x_1)$ เราได้ว่า

$f(x) \le f(x_1) < \beta + \varepsilon$

แต่ทุก $x \in (x_0, x_1)$ เราทราบว่า

$\beta - \varepsilon < \beta \le f(x)$

นั่นคือ ทุก $x \in (x_0 , x_1)$ เราได้ว่า

$$\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ ■

ทฤษฎีบท 4.2.16 : ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้นหรือเป็นฟังก์ชันโมโนโทนลดลงบน $[a,b]$ แล้ว

(1) f^{-1} เป็นฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้นหรือเป็นฟังก์ชันโมโนโทนลดลงบน $[a,b]$

(2) f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน $[f(a), f(b)]$

พิสูจน์ : เราจะพิสูจน์กรณีที่ f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้น

(1) เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น f^{-1} หาค่าได้ และ $D(f^{-1}) = [f(a), f(b)]$, $R(f^{-1}) = [a,b]$

ให้ $y_1 , y_2 \in [f(a), f(b)]$ ซึ่ง $y_1 < y_2$

เราต้องการแสดงว่า $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ เนื่องจาก $y_1 , y_2 \in [f(a), f(b)]$

ดังนั้นมี x_1 และ x_2 ใน $[a,b]$ ซึ่ง $f(x_1) = y_1$ และ $f(x_2) = y_2$

ถ้า $x_1 \geq x_2$ แล้ว เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น จะได้ว่า

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $x_1 < x_2$ และ

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_2 = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1}(y_2)$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้น

(2) จะแสดงว่า f^{-1} ต่อเนื่องบน $[f(a), f(b)]$

ประการแรก เราจะแสดงว่า f^{-1} ต่อเนื่องทางซ้ายที่ y_0 นั่นคือ

เราจะแสดงว่า $\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$

ให้ $\{y_n\}$ เป็นลำดับแบบเพิ่มขึ้นของจำนวนใน $[f(a), f(b)]$

ซึ่ง $lim\ y_n = y_0$

เราจะแสดงว่า

$$lim\ f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$$

สำหรับแต่ละ n จะมี $x_n \in [a,b]$ ซึ่ง $f(x_n) = y_n$

นั่นคือ $x_n = f^{-1}(y_n)$

เนื่องจาก f^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น ดังนั้น $\{x_n = f^{-1}(y_n)\}$ เป็นลำดับแบบเพิ่มขึ้น

เนื่องจาก $|x_n| \le b$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.17 $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $lim\ x_n = x_0$

โดย ทฤษฎีบท 3.3.17 ข้อ 1 และ ข้อ 4 เราสรุปได้ว่า $x_0 \in [a,b]$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ x_0 และโดยทฤษฎีบท 4.2.14 จะได้ว่า

$\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$

นั่นคือ

$$lim\ f(x_n) = f(x_0) = f(lim\ x_n)$$

เพราะฉะนั้น

$$lim\ y_n = f(x_0) = f(lim\ x_n) \quad \text{แต่} \quad lim\ y_n = y_0$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{หรือ} \quad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

เพราะว่า $lim\ x_n = x_0$ และ $x_n = f^{-1}(y_n)$

โดยทฤษฎีบท 4.2.14 สรุปได้ว่า $lim\ f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า

f^{-1} ต่อเนื่องทางขวาที่ y_0

โดยทฤษฎีบท 4.2.14 สรุปได้ว่า f^{-1} ต่อเนื่องที่ y_0

นั่นคือ f^{-1} ต่อเนื่องบน $[f(a), f(b)]$ ■

บรรณานุกรม

[1] ดรรชนี กิจสมัคร **ลำดับของจำนวนจริง** เอกสารประกอบการสัมมนาทางคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2548.

[2] วารี เกรอต **แคลคูลัส** สำนักพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด, 2539.

[3] ศิริอร บุญมา **ความบริบูรณ์ของจำนวนจริงในทฤษฎีบทสำคัญทางแคลคูลัส** เอกสารประกอบการสัมมนาทางคณิตศาสตร์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2549.

[4] อังคณา ศรีเตชานุพงศ์ **ลำดับของจำนวนจริง** เอกสารประกอบการสัมมนาทางคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2550.

[5] Belding, D.,F. **Foundations of Analysis.** Prentice-Hall,Inc.,1991.

[6] Kirkwood,J.,R. **An Introduction to Analysis,** 2 nd edition . PWS Publishing Company,1995.

[7] Lewin , J., **An Introduction to mathematical Analysis ,** 2 nd edition . Mc Graw-Hill ,Inc., 1993.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นางสาวอรวรรณ์ กลั่นบุศย์
ที่อยู่	118 หมู่ 5 ตำบลพนมทวน อำเภอพนมทวน จังหวัดกาญจนบุรี 71140
ที่ทำงาน	โรงเรียนศึกษาสงเคราะห์พนมทวน ตำบลพนมทวน อำเภอพนมทวน จังหวัดกาญจนบุรี 71140

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2538	สำเร็จการศึกษาปริญญาศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก
พ.ศ. 2548	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2538	รับราชการครู ตำแหน่ง อาจารย์ 1 ระดับ 3 โรงเรียนทองผาภูมิวิทยา จังหวัดกาญจนบุรี
พ.ศ. 2540 – ปัจจุบัน	รับราชการครู ตำแหน่ง ครูชำนาญการ โรงเรียนศึกษาสงเคราะห์พนมทวน อำเภอพนมทวน จังหวัดกาญจนบุรี