

คำตอบสมการเชิงผลต่างของสนามไฟฟ้าที่มาจากวัตถุตัวนำไฟฟ้า

โดย

นางสาวณัฐกานต์ เกิดพันธุ์

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2549

ISBN 974 – 11 – 6240 - 5

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

**DIFFERENCE EQUATION SOLUTION OF ELECTRIC FIELD RESPONSE
FROM A CONDUCTIVE BODY**

By

Janit Girdpun

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2006

ISBN 974 – 11 – 6240 - 5

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง”คำตอบสมการเชิงผลต่าง
ของสนามไฟฟ้าที่มาจากวัตถุตัวนำไฟฟ้า” เสนอโดย นางสาวณัฐศิ เกิดพันธุ์ เป็น ส่วนหนึ่ง
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี
สารสนเทศ

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตั้งกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง

คณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

...../...../.....

.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)

...../...../.....

.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

...../...../.....

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

K 45308303 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

คำสำคัญ : สมการเชิงผลต่าง สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็กไฟฟ้า

ยูนิท เกิดพันธุ์ : คำตอบสมการเชิงผลต่างของสนามไฟฟ้าที่มาจากวัตถุตัวนำไฟฟ้า

(DIFFERENCE EQUATION SOLUTION OF ELECTRIC FIELD RESPONSE FROM

A CONDUCTIVE BODY) อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ.ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง. 79 หน้า.

ISBN 974-11-6240-5

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ ผู้จัดทำได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการศึกษาความเข้มของสนามไฟฟ้าจากใต้พื้นดินที่เป็นตัวกลางนำไฟฟ้า สมการแมกซ์เวลล์ถูกนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การดำเนินการหาค่าความเข้มของสนามไฟฟ้าทำได้ด้วยการแก้สมการแมกซ์เวลล์ โดยอาศัยวิธีสมการเชิงผลต่าง ร่วมกับเทคนิควิธีแก้สมการเมตริกซ์ การคำนวณค่าความเข้มของสนามไฟฟ้าทำโดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica และให้ผลลัพธ์ ซึ่งถูกนำมาแสดงได้ในรูปกราฟเส้นและกราฟคอนทัวร์ใน 2 มิติ

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2549

ลายมือชื่อนักศึกษา.....

ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์.....

K 45308303 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY.

KEY WORD : DIFFERENCE EQUATION, ELECTRIC FIELD,
ELECTROMAGNETIC FIELD.

JANIT GIRDPUN : DIFFERENCE EQUATION SOLUTION OF ELECTRIC FIELD
RESPONSE FROM A CONDUCTIVE BODY. MASTER'S REPORT ADVISOR : ASSOC.
PROF. SUABSAGUN YOOYUANYONG, Ph.D. 79 pp. ISBN 974-11-6240-5.

In this project, we present the mathematical model of electric field response from the
conductive ground. The mathematical model is conducted by using the Maxwell's equation.
Numerical analysis of the difference equation is used to compute the electric field by using matrix
equations. The symbolic computation package, namely "Mathematica", is used to compute the
electric field and the out put are shown as the two dimensional line graphs and contour plot.

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2006

Student's signature.....

Master's Report Advisor's signature.....

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง ที่ให้คำปรึกษา และคำแนะนำ ทำให้โลกทัศน์ทางวิชาการของผู้จัดทำกว้างขวางยิ่งขึ้น อีกทั้งยังช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่อง จนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จไปได้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ และคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ขอขอบคุณเพื่อน ๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศทุกท่าน สำหรับกำลังใจและความจริงใจที่มีให้กันเสมอมา

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่มอบความรัก การดูแลเอาใจใส่ และการสนับสนุนทางการศึกษา จนทำให้ลูกมีความสำเร็จในวันนี้

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
บัญชีสัญลักษณ์.....	ฉ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	2
2. ทฤษฎีบทพื้นฐาน.....	5
2.1 สมการเชิงผลต่าง.....	5
2.2 ผลหารเชิงผลต่าง.....	8
2.3 การแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยสมการเชิงผลต่าง.....	10
3 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	12
4 การคำนวณเชิงตัวเลข.....	18
5 วิจารณ์และสรุปผล.....	45
บรรณานุกรม.....	47
ภาคผนวก.....	48
ภาคผนวก ก โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมน 16 ช่อง ($\sigma = 8 \text{ S/m.}$).....	49
ภาคผนวก ข โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมน 16 ช่อง ($\sigma = 0.1 \text{ S/m.}$).....	52
ภาคผนวก ค โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมน 64 ช่อง ($\sigma = 8 \text{ S/m.}$).....	55

ภาคผนวก ง โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมน 64 ช่อง ($\sigma = 0.1 \text{ S/m}$).....	67
ประวัติผู้วิจัย.....	79

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

บัญชีสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
r	ระยะห่างระหว่างเครื่องมือส่งและรับสนามไฟฟ้า
z	ระยะทางในแนวตั้ง
E	สนามไฟฟ้า
H_r	สนามแม่เหล็กในแนวแกน r
H_z	สนามแม่เหล็กในแนวแกน z
J_p	ค่าความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าบนขดลวด วงแหวนที่เป็นแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
ω	ความถี่เชิงมุม
$I(\omega)$	เป็นกระแสไฟฟ้าที่ไหลในขดลวดวงแหวนที่ใช้เป็น แหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
ε	เป็นค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้า ของวัสดุใด ๆ
ε_0	เป็นค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของ สุญญากาศ มีค่าประมาณ 8.85×10^{-12} F/m.
μ	เป็นค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็ก ของวัสดุใด ๆ
μ_0	เป็นค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของ สุญญากาศ มีค่าประมาณ 12.57×10^{-7} H/m.
σ	สภาพนำไฟฟ้าของตัวกลาง

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันมนุษย์สามารถนำทรัพยากรธรรมชาติที่ฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลกขึ้นมาใช้ประโยชน์ได้นานับประการทั้งในภาคการเกษตร และภาคอุตสาหกรรม ทำให้มีการศึกษาลักษณะโครงสร้างของพื้นโลกกันอย่างแพร่หลาย โดยอาศัยความรู้ทางด้านธรณีฟิสิกส์ ซึ่งเป็นวิทยาศาสตร์แขนงหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับการสำรวจพื้นโลก โดยทั่วไปวิธีการนี้มักอาศัย คณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และความแตกต่างของสมบัติทางกายภาพของพื้นโลก ในการค้นหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติ เช่น สภาพด้านทาน สภาพนำไฟฟ้า ความต่างศักย์ สนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้า เป็นต้น

ธรณีฟิสิกส์สามารถแบ่งออกเป็น 2 สาขาใหญ่ดังนี้ ธรณีฟิสิกส์องค์รวม (Global Geophysics) และธรณีฟิสิกส์เพื่อการสำรวจหาทรัพยากร (Exploration Geophysics) โดยธรณีฟิสิกส์องค์รวมจะศึกษาเกี่ยวกับ แผ่นดินไหว สมุทรศาสตร์เชิงฟิสิกส์ สถานะความร้อนของโลก และอุณหภูมิมหาสมุทร แต่ธรณีฟิสิกส์เพื่อการสำรวจหาทรัพยากรจะศึกษาสมบัติทางกายภาพของพื้นโลก เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการค้นหาแหล่งน้ำมัน ก๊าซ และแร่ธาตุที่ฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลก

โดยส่วนใหญ่ แหล่งทรัพยากรธรรมชาติจะฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลก ซึ่งยากต่อการค้นหา ดังนั้นวิธีการสำรวจเพื่อค้นหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติจะต้องแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างแร่ธาตุและพื้นโลกในบริเวณรอบ ๆ ซึ่งข้อมูลทางธรณีฟิสิกส์ที่ได้จากการสำรวจจะต้องสามารถนำมาประมวลผล เพื่อบ่งบอกถึงตำแหน่งของแร่ธาตุได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ อย่างไรก็ตาม การสำรวจโดยการสุ่มตัวอย่างโดยตรงจะมีค่าใช้จ่ายค่อนข้างสูง ดังนั้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จึงเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่มีความนิยมอย่างมาก เนื่องจากเป็น วิธีการที่ใช้ค่าใช้จ่ายน้อยกว่าวิธีอื่น

การสำรวจทางธรณีฟิสิกส์โดยอาศัยวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อการคำนวณหาพฤติกรรมตอบสนองของสนามแม่เหล็ก หรือสนามไฟฟ้าในพื้นโลกเป็นที่รู้จักกันดีในชื่อว่า การแก้ปัญหาโดยตรง (forward problem solving) ในทางกลับกัน การนำข้อมูลที่ได้จากการตอบสนองของสนามแม่เหล็ก หรือสนามไฟฟ้าในพื้นโลกมาวิเคราะห์ เพื่อศึกษาลักษณะโครงสร้างทางธรณีวิทยา จะมีชื่อเรียกว่า การแก้ปัญหาผกผัน (inverse problem solving)

อย่างไรก็ตาม ก่อนที่เราจะศึกษาการแก้ปัญหาผกผันทางธรณีฟิสิกส์นั้น เราจำเป็นต้องศึกษาการแก้ปัญหาโดยตรงเสียก่อนซึ่งมีความสำคัญเป็นอย่างมาก

วิธีการสำรวจโครงสร้างทางธรณีวิทยาของพื้นโลกในทางธรณีฟิสิกส์มีอยู่ด้วยกันหลายวิธี เช่น วิธีการทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic method) วิธีการสภาพต้านทาน(resistivity method) และวิธีการทางสภาพต้านทานแบบแมกนีโทเมตริก (magnetometric resistivity method) เป็นต้น

วิธีการต่าง ๆ ที่กล่าวมานี้ใช้สมมติฐานว่า โครงสร้างของพื้นโลกถูกแบ่งออกเป็นชั้น ๆ โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวและมีความลึกจำกัด ยกเว้นชั้นล่างสุด ซึ่งจะมีความลึกเป็นอนันต์ นอกจากนี้ โครงสร้างทางธรณีวิทยาของพื้นโลกในบางแห่ง เช่นบริเวณที่มีเปลือกโลกชั้นบนสุดเป็นชั้นดินใหม่ทับถมอยู่บนชั้นดินเก่าที่มีอายุหลายหมื่นหลายแสนปี ซึ่งพบว่าสภาพนำไฟฟ้าของเปลือกโลกชั้นบนสุดจะไม่เป็นค่าคงตัว เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น แต่จะมีลักษณะเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง คล้ายกับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันทวินาม หรือฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น เช่น บริเวณพื้นที่ชายฝั่งทะเล หรือบริเวณที่อยู่ใกล้กับแหล่งน้ำที่มีระดับน้ำเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา เราพบว่าสภาพนำไฟฟ้าของเปลือกโลกชั้นบนสุดจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่องคล้ายกับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น และจะเข้าสู่ค่าคงตัวค่าหนึ่ง ซึ่งค่าคงตัวนี้อาจเป็นสภาพนำไฟฟ้าของชั้นดินเก่า

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ จะได้นำเสนอวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างใต้พื้นโลกที่มีชั้นเดียว และมีสภาพนำไฟฟ้าคงตัว การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อการค้นหาสนามไฟฟ้าในพื้นโลกโดยใช้วิธีสมการเชิงผลต่าง ในการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบ ซึ่งวิธีการนี้เป็นเทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพสูง สามารถศึกษาภาพหน้าตัดของโครงสร้างพื้นดินได้เป็นอย่างดี และจะให้ผลการคำนวณที่ดีกว่าวิธีการที่ใช้คณิตศาสตร์อื่น ๆ ที่ปรากฏในงานวิจัยของ Chumchob [2] งานวิจัยของ Stoyer และ Wait [9] งานวิจัยของ Benerjee และคณะ [1] งานวิจัยของ Siew และ Yooyuanyong [8] งานวิจัยของ Edwards และ Nabighian [3] และงานวิจัยของ Ketchanwit [5] ซึ่งปรากฏอยู่ในเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Edwards และ Nabighian [3] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น n ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และในแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัว และมีความลึกจำกัด ยกเว้นชั้นล่างสุด ซึ่งจะมีความ

ลึกเป็นอนันต์ โดยสามารถคำนวณหาค่าประมาณของอัตราส่วนระหว่างสนามแม่เหล็กใน ชั้นบน และชั้นล่างของชั้นที่อยู่ติดกันได้

Chumchob [2] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการค้นหาตำแหน่ง สภาพนำไฟฟ้า ความนำไฟฟ้า และส่วนหนาของกลุ่มแร่ธาตุรูปทรงกระบอกกลม 3 มิติฝังตัวอยู่ใต้พื้นผิวโลก ที่มีลักษณะสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามความลึก โดยใช้วิธีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ผลการวิจัยพบว่าสมการบรรยายสนามไฟฟ้าของแต่ละบริเวณ ถูกเขียนอยู่ในรูปของสมการอินทิกรัล กระบวนการผกผันได้นำสมการอินทิกรัลที่ได้ มาคำนวณหาค่าที่เหมาะสมของพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า ได้แก่ ตำแหน่ง สภาพนำไฟฟ้า ความนำไฟฟ้า และส่วนหนาของกลุ่มแร่ธาตุ โดยค่าพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าดังกล่าว มีบทบาทสำคัญในการบรรยายลักษณะโครงสร้างของบริเวณใต้พื้นผิวโลก

Ketchanwit [5] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อการศึกษาโครงสร้างใต้พื้นผิวโลก โดยใช้วิธีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า แบบจำลองแบ่งพื้นโลกเป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ แบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลก มีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียวและมีสภาพนำไฟฟ้าคงที่ σ_0 แบบจำลองที่สองเป็นแบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น แต่ละชั้นมีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียว และกำหนดให้ดินชั้นล่างมีค่าสภาพนำไฟฟ้าคงที่ σ_0 และดินชั้นบนซึ่งมีความหนา a มีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบลดลงเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น $\sigma_0 e^{-b(z-d)}$ และ แบบจำลองสุดท้ายเป็นแบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น แต่ละชั้นมีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียว และกำหนดให้ดินชั้นบนซึ่งมีความหนา a มีค่าสภาพนำไฟฟ้าคงที่ σ_0 และดินชั้นล่างมีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบลดลงเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น $\sigma_0 e^{-b(z-d)}$ โดยใช้เทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์ จะได้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่บรรยายสนามไฟฟ้าที่ตอบสนองมาจากพื้นผิวโลกซึ่งจะนำพาข้อมูลต่าง ๆ ที่อยู่ใต้ผิวโลกขึ้นมา

Stoyer และ Wait [9] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทางสภาพต้านทาน เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นโลก และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นบนเป็นค่าคงตัว ส่วนชั้นล่างจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ซึ่งนิยามโดย

$$\sigma_2(z) = c\sigma_1 e^{-b(z-h)}, \quad z \geq h$$

เมื่อ b, c เป็นจำนวนจริงบวก, $\sigma_1 > 0$ แทนสภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกชั้นบน และ $h > 0$ แทนความลึกของพื้นโลกชั้นบน ซึ่งวัดจากพื้นผิวโลกจนถึงระนาบรอยต่อระหว่างชั้นบนและชั้นล่างของพื้นโลก

Banerjee และคณะ [1] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทางสภาพ
 ด้านทาน เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น $n+1$ ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมี
 ลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นใดชั้นหนึ่งมีลักษณะการ
 เปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ซึ่งนิยามโดย
 สำหรับบางค่าของ k ซึ่ง $1 \leq k \leq n$

$$\sigma_{k+1}(z) = c\sigma_k e^{b(z-h_k)}, \quad h_{k-1} \leq z \leq h_k$$

เมื่อ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ, c เป็นจำนวนจริงบวกและ $\sigma_k > 0$ แทนสภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลก
 ชั้นที่ k และ $h_{k-1}, h_k > 0$ แทนความลึกของพื้นโลกชั้นที่ $k-1$ และ k ตามลำดับ

Siew และ Yooyuanyong [8] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทาง
 สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบการวัดแบบอิงความถี่ (frequency domain) เพื่อศึกษาปัญหา
 ย้อนกลับของการค้นหากลุ่มแร่ธาตุที่นำไฟฟ้า และมีรูปร่างคล้ายจานกลมบาง ซึ่งฝังตัวอยู่ใต้พื้น
 โลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นโลก และ
 สภาพนำไฟฟ้าของชั้นบนมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น
 ซึ่งนิยามโดย

$$\sigma_1(z) = \sigma_0 e^{-bz}, \quad 0 \leq z \leq h$$

เมื่อ b, σ_0 เป็นจำนวนจริงบวก และ $h > 0$ แทน ความลึกของพื้นโลกชั้นบน ซึ่งวัดจากพื้นผิวโลก
 จนถึงระนาบรอยต่อระหว่างชั้นบนและชั้นล่างของพื้นโลก โดยสมมติว่า กลุ่มแร่ธาตุดังกล่าวฝัง
 ตัวอยู่ใต้พื้นโลกชั้นล่าง ซึ่งสภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกชั้นนี้มีค่าน้อยมาก

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น มีการใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์หลายรูปแบบ แตกต่างกัน
 ออกไป ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ ได้ใช้วิธีสมการเชิงผลต่าง ซึ่งมีความแตกต่างจากงานวิจัยชิ้นอื่น

บทที่ 2

ทฤษฎีบทพื้นฐาน

2.1 สมการเชิงผลต่าง

บทนิยาม 1 ให้ u เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรอิสระ x ซึ่งใช้สัญลักษณ์ u_x โดยที่ $x \in S$ และ S เป็นเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมการเชิงผลต่าง คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน u_x เขียนในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

$$u_{x+n} = f(x, u_{x+n-1}, u_{x+n-2}, \dots, u_x)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 2 ให้ Δ เป็นตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่หนึ่ง ซึ่งกำหนดดังนี้

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x$$

และเรียก Δ^2 ว่าตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่สอง กำหนดดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_x &= \Delta(\Delta u_x) = \Delta(u_{x+1} - u_x) \\ &= (u_{x+2} - u_{x+1}) - (u_{x+1} - u_x) \\ &= u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x\end{aligned}$$

และเรียก Δ^3 ว่าตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่สาม กำหนดดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta^3 u_x &= \Delta(\Delta(\Delta u_x)) = \Delta(\Delta(u_{x+1} - u_x)) \\ &= \Delta(u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x) \\ &= (u_{x+3} - 2u_{x+2} + u_{x+1}) - (u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x) \\ &= u_{x+3} - 3u_{x+2} + 3u_{x+1} - u_x\end{aligned}$$

ในกรณีทั่วไปเรียก Δ^n ว่าตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่ n กำหนดดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta^n u_x &= \Delta(\Delta^{n-1}(\Delta^{n-2} \dots (\Delta u_x))) \\ &= u_{x+n} - nu_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} u_{x+n-2} \\ &\quad + \dots + (-1)^i \frac{n(n-1) \dots (n-i-1)}{i!} u_{x+n-i} + \dots + (-1)^n u_x\end{aligned}$$

ตัวอย่างของสมการเชิงผลต่าง

$$\Delta u_x + 3u_x = 0 \quad (2-1)$$

$$\Delta^2 u_x + 2\Delta u_x + u_x = 0 \quad (2-2)$$

$$\Delta^2 u_x - xu_x = 2x+7 \quad (2-3)$$

$$u_x \Delta^2 u_x = \frac{1}{2} \quad (2-4)$$

$$[\Delta u_x]^2 + [u_x]^2 = -1 \quad (2-5)$$

ดังนั้นจากนิยามของตัวดำเนินการผลต่างเราสามารถเขียนสมการ (2-1) ถึง (2-5) ใหม่ได้ดังนี้

$$u_{x+1} + 2u_x = 0 \quad (2-1')$$

$$u_{x+2} = 0 \quad (2-2')$$

$$u_{x+2} - 2u_{x+1} + (1-x)u_x = 2x+7 \quad (2-3')$$

$$u_x u_{x+3} - 3u_x u_{x+2} + 3u_x u_{x+1} - u_x^2 = \frac{1}{2} \quad (2-4')$$

$$(u_{x+1} - u_x)^2 + u_x^2 = -1 \quad (2-5')$$

บทนิยาม 3 คำตอบของสมการเชิงผลต่าง คือ ฟังก์ชัน u_x ใดๆ ซึ่งสอดคล้องสมการเชิงผลต่างนั้น

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน u_x ซึ่งกำหนดโดย

$$u_x = 1 - \frac{2}{x}, \quad x=1,2,3,\dots \quad (2-6)$$

เป็นคำตอบของสมการเชิงผลต่าง

$$(x+1)u_{x+1} + xu_x = 2x-3, \quad x=1,2,3,\dots \quad (2-7)$$

วิธีทำ

การแสดงว่าสมการ (2-6) เป็นคำตอบของสมการ (2-7) ทำได้โดย การแทนสมการ (2-6) ลงในสมการ (2-7) ดังนี้

จากสมการ (2-6) เราทราบว่า

$$u_{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

ดังนั้นสมการ (2-7) เขียนได้เป็น

$$(x+1)\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) + x\left(1 - \frac{2}{x}\right) = 2x-3$$

ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้

$$(x+1) - 2 + x - 2 = 2x-3$$

หรือ

$$2x-3 = 2x-3$$

จะเห็นได้ว่าสมการเป็นจริงเสมอ ดังนั้นสมการ (2-6) เป็นคำตอบของสมการ (2-7)

ตัวอย่าง 2 จงแสดงว่าสมการเชิงผลต่าง

$$u_{x+2} - 4u_{x+1} + 4u_x = 0, \quad x=0,1,2,\dots \quad (2-8)$$

มีคำตอบเป็น

$$u_x = 2^x(c_1 + c_2x), \quad x=0,1,2,\dots \quad (2-9)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ

การแสดงว่าสมการ (2-9) เป็นคำตอบของสมการ (2-8) ทำได้โดย การแทนสมการ (2-9) ลงในสมการ(2-8) ดังนี้

$$2^{x+2}[c_1 + c_2(x+2)] - (4) \cdot (2^{x+1})[c_1 + c_2(x+1)] + (4) \cdot (2^x)(c_1 + c_2x) = 0 \quad (2-10)$$

โดยการแยกตัวประกอบได้

$$2^{x+2} \{c_1 + c_2(x+2) - 2[c_1 + c_2(x+1)] + c_1 + c_2x\} = 0$$

หรือ

$$0 = 0$$

ดังนั้นสมการ (2-9) เป็นคำตอบของสมการ (2-8)

เราสามารถเปลี่ยนปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของสมการเชิงผลต่างได้ โดยการแทนที่อนุพันธ์ย่อยด้วยผลหารเชิงผลต่าง ในลำดับต่อไปเราจะกล่าวถึงผลหารเชิงผลต่าง

2.2 ผลหารเชิงผลต่าง

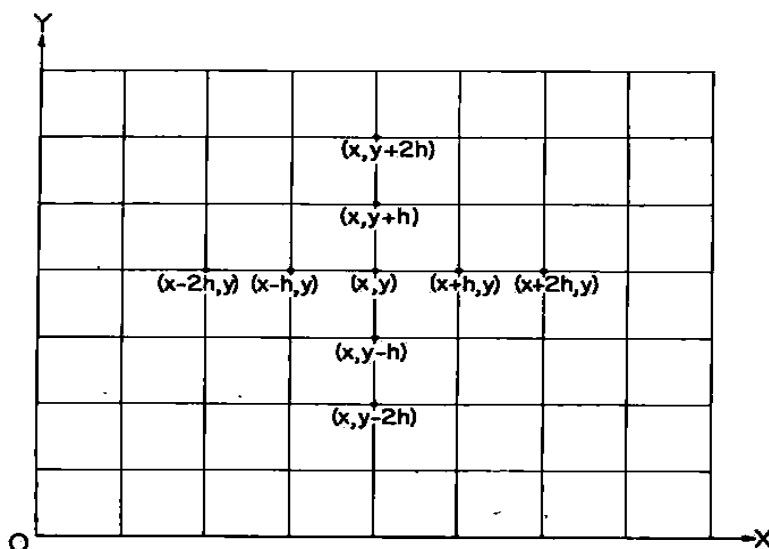
ผลหารเชิงผลต่าง คือ ผลหารที่เกิดจากการหารผลต่าง ระหว่างค่าของฟังก์ชัน 2 ค่า คือ $u_{x+h} - u_x$ ด้วยผลต่างระหว่างตัวแปรอิสระ (h) ซึ่งเขียนได้เป็น $\frac{u_{x+h} - u_x}{h}$ โดยที่ระยะห่างระหว่างสองฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ h หน่วย

ค่าลิมิตของผลหารเชิงผลต่างเมื่อ $h \rightarrow 0$ จะหมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน u_x เทียบกับตัวแปร x ดังนั้น ผลหารเชิงผลต่างจะเป็นค่าประมาณของอนุพันธ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ h มีค่าน้อยมาก

ผลหารเชิงผลต่างของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว ถูกสร้างโดยใช้โครงข่ายหรือแลตทิซบนระนาบ xy โดยมีโครงข่ายหรือแลตทิซเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีความกว้าง h หน่วย ความยาว k หน่วยและเพื่อให้ง่ายมักกำหนดให้ $h=k$ ดังรูปที่ 2-1

$$x = mh, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$y = nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



รูปที่ 2-1 แสดงโครงข่ายหรือแลตทิซบนระนาบ xy

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

จากรูปที่ 2-1 จุดตัดของชุดของเส้น ถูกเรียกว่า จุดแลตทิซ ผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 1

แบบไปข้างหน้าของฟังก์ชันสองตัวแปร $u(x, y)$ เทียบกับตัวแปร x ถูกกำหนดโดย

$$\hat{u}_x = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}, \quad (2-11)$$

และผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 1 แบบย้อนหลังของฟังก์ชันสองตัวแปร $u(x, y)$ เทียบกับตัวแปร x ถูกกำหนดโดย

$$\hat{u}_x^- = \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h}, \quad (2-12)$$

ผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 2 แบบผลต่างกลางของฟังก์ชันสองตัวแปร $u(x, y)$ เทียบกับตัวแปร x คือ ผลหารเชิงผลต่างของผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 1 ในสมการ (2-11) และ สมการ (2-12) ซึ่งนิยามโดย

$$\hat{u}_{xx} = \frac{\hat{u}_x - \hat{u}_x^-}{h} = \frac{\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h}}{h}$$

$$\frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} \quad (2-13)$$

ผลหารเชิงผลต่างของอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของฟังก์ชันสองตัวแปร $u(x, y)$ เทียบกับตัวแปร y หาได้เช่นเดียวกับวิธีการข้างต้น คือ

$$\hat{u}_y = \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h}, \quad \hat{u}_y = \frac{u(x, y) - u(x, y-h)}{h}, \quad (2-14)$$

และ

$$\hat{u}_{yy} = \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} \quad (2-15)$$

ผลหารเชิงผลต่างอันดับที่สูงขึ้นไป หาได้ด้วยวิธีการเดียวกับวิธีการข้างต้น

2.3 การแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยสมการเชิงผลต่าง

เราสามารถหาคำตอบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ ด้วยวิธีการต่าง ๆ หลายวิธี เช่น ใช้วิธีการแยกตัวแปร วิธีการแปลงอินทิกรัล เป็นต้น วิธีการต่าง ๆ เหล่านี้มีจุดอ่อนและจุดแข็งแตกต่างกันไป และวิธีการหนึ่งที่ยืดหยุ่นและสะดวก ได้แก่วิธีการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงผลต่าง โดยการแทนที่อนุพันธ์ย่อย ด้วยผลหารเชิงผลต่าง และดำเนินการตามขั้นตอนเพื่อหาคำตอบของสมการเชิงผลต่าง คำตอบที่ได้จะอยู่ที่จุดแลตทิซ และเราสามารถกำหนดจุดเหล่านี้ให้ถี่มากหรือน้อยตามที่เราต้องการ โดยปรับลดค่า h ในการหาคำตอบ ในลำดับต่อมาจะได้แสดงตัวอย่างวิธีการแปลง สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงผลต่างของสองตัวแปร ดังนี้

2.3.1 การแปลงสมการลาปลาซให้เป็นสมการเชิงผลต่าง

สมการลาปลาซ สำหรับ 2 มิติ ซึ่งกำหนดโดย

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

เราประมาณ $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ ด้วย \hat{u}_{xx} และ \hat{u}_{yy} ดังสมการ (2-13) และ (2-15) ตามลำดับ

และ สามารถเขียนสมการลาปลาซใน 2 มิติได้เป็น

$$\frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} = 0$$

ดังนั้นเมื่อจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h)] \quad (2-16)$$

สมการนี้ใช้สำหรับหาค่าของ $u(x, y)$ ซึ่งเป็นจุดแลตทิซ โดยใช้จุดสี่จุดที่อยู่ข้างเคียงซึ่ง
ทราบค่า

2.3.2 การแปลงสมการปัวซองให้เป็นสมการเชิงผลต่าง

สมการปัวซอง สำหรับ 2 มิติ ซึ่งกำหนดโดย

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y)$$

ประมาณ $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ ด้วย \hat{u}_{xx} และ \hat{u}_{yy} ดังสมการ (2-13) และ (2-15) ตามลำดับ

ดังนั้นสามารถเขียนสมการปัวซองใน 2 มิติได้เป็น

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h)] + \pi h^2 \rho(x, y) \quad (2-17)$$

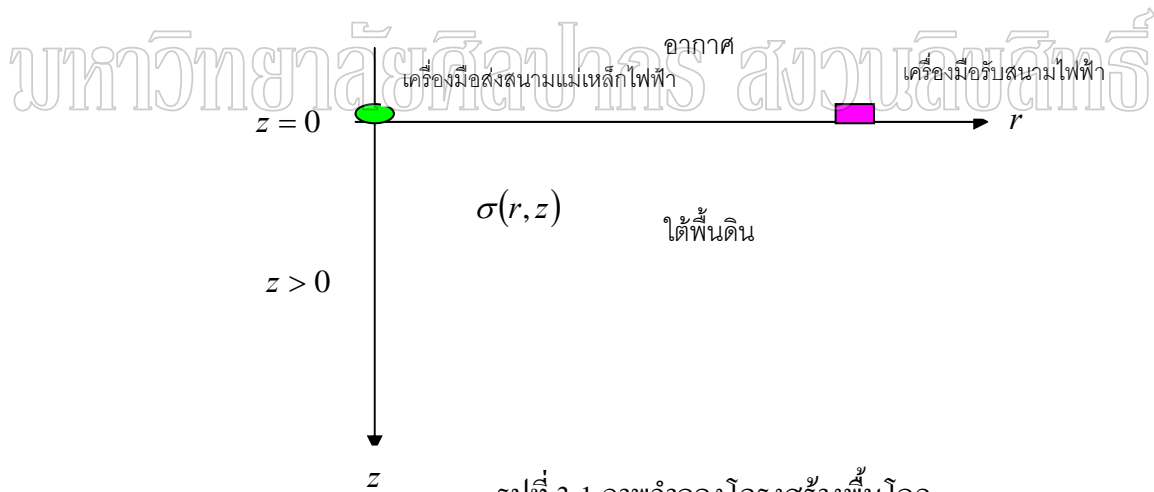
จากสมการ (2-18) จะเห็นได้ว่าค่าของ $u(x, y)$ ขึ้นอยู่กับจุดแลตทิซที่อยู่ใกล้เคียงโดยรอบ และฟังก์ชันของ
เมื่อทราบค่าต่าง ๆ เหล่านี้ จะทำให้สามารถหาค่า $u(x, y)$ ได้

บทที่ 3

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในบทนี้เราจะแสดงวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแสดงการหาคำตอบ โดยใช้วิธีสมการเชิงผลต่างในการหาค่าสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งต่าง ๆ

พิจารณารูปที่ 3-1 เป็นแบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลก ให้ z คือ ระยะความลึกของวัตถุใด ๆ จากระดับพื้นผิวโลก (เมตร) บริเวณที่ $z = 0$ กำหนดให้มีเครื่องมือส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และที่ระยะห่างจากเครื่องมือส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้า มีเครื่องมือรับสนามไฟฟ้าซึ่งอยู่ห่างจากเครื่องมือส่งเป็นระยะทาง r เมตร และบริเวณที่ $z > 0$ คือระยะทางที่ลึกลงไปภายใต้พื้นดิน กำหนดให้พื้นดินมีสภาพนำไฟฟ้าเป็น $\sigma(r,z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ z



รูปที่ 3-1 ภาพจำลองโครงสร้างพื้นโลก

จากสมการของ แมกซ์เวลล์ ซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กและเขียนได้ในระบบพิกัดทรงกระบอก (r, ϕ, z) คือ

$$\frac{\partial E}{\partial z} = i\omega\mu H_r \quad (3-1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial rE}{\partial r} = -i\omega\mu H_z \quad (3-2)$$

และ
$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = (\sigma + i\epsilon\omega)E + J_p \quad (3-3)$$

โดยที่ E หมายถึง สนามไฟฟ้า
 H_r หมายถึง สนามแม่เหล็กในแนวแกน r
 H_z หมายถึง สนามแม่เหล็กในแนวแกน z
 J_p เป็น ค่าความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าบนขดลวดวงแหวนที่เป็นแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีค่าดังสมการ

$$J_p = \frac{I(\omega)a\delta(r-a)\delta(z+h)}{r}$$

ω ความถี่เชิงมุม
 $I(\omega)$ เป็นกระแสไฟฟ้าที่ไหลในขดลวดวงแหวนที่ใช้เป็นแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
 σ เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าของวัสดุใด ๆ
 ϵ เป็นค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของวัสดุใด ๆ
 μ เป็นค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของวัสดุใด ๆ

ต่อไปนำสมการ (3-1), (3-2) และ (3-3) มาสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับนำไปใช้ในการหาสนามไฟฟ้า E ได้ดังนี้

การหาสนามไฟฟ้า E ได้ดังนี้

จากสมการ (3-1) เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร z จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (i\omega\mu H_r) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = i\omega\mu \frac{\partial H_r}{\partial z}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (3-4)$$

จากสมการ (3-2) เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร r จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rE}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} (-i\omega\mu H_z) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left[r \frac{\partial E}{\partial r} + E \frac{\partial r}{\partial r} \right] \right) &= -i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} E \right) &= -i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} E \right) &= -i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + E \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) &= -i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E = -i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r}$$

ดังนั้น

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E \right) \quad (3-5)$$

แทนสมการ (3-4) และ (3-5) ในสมการ (3-3) จะได้

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = i\omega\mu\eta E + i\omega\mu J_p \quad (3-6)$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์
โดยที่ $\eta = \sigma(r, z) + i\omega\epsilon$

ในลำดับต่อไปจะใช้วิธีสมการเชิงผลต่างมาใช้ในการแก้ปัญหของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยจะทำการประมาณอนุพันธ์ย่อยด้วยผลหารเชิงผลต่างในสมการ (3-6) ซึ่งผลหารเชิงผลต่างกำหนด ดังนี้

$$\begin{aligned}E &= E(r, z) \\ \frac{\partial E}{\partial r} &\approx \frac{E(r+h, z) - E(r, z)}{h} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &\approx \frac{E(r, z+k) - 2E(r, z) + E(r, z-k)}{k^2} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} &\approx \frac{E(r+h, z) - 2E(r, z) + E(r-h, z)}{h^2}\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ (3-6) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{E(r+h,z)-2E(r,z)+E(r-h,z)}{h^2} + \frac{1}{r} \frac{E(r+h,z)-E(r,z)}{h} + \frac{E(r,z+k)-2E(r,z)+E(r,z-k)}{k^2}$$

$$= i\omega\mu\eta E(r,z) + i\omega\mu J_p + \frac{1}{r^2} E(r,z)$$

$$\frac{rh[E(r+h,z)-2E(r,z)+E(r-h,z)]}{rh^3} + h^2 \frac{[E(r+h,z)-E(r,z)]}{k^2} + \frac{E(r,z+k)-2E(r,z)+E(r,z+h)}{k^2}$$

$$= i\omega\mu\eta E(r,z) + i\omega\mu J_p + \frac{1}{r^2} E(r,z)$$

$$\frac{rh[E(r+h,z)+E(r-h,z)]}{rh^2} + h^2 \frac{E(r+h,z)}{k^2} + \frac{E(r,z+k)+E(r,z-k)}{k^2} - \left[\frac{2rhE(r,z)+h^2E(r,z)}{rh^3} + \frac{2E(r,z)}{k^2} \right]$$

$$= i\omega\mu\eta E(r,z) + i\omega\mu J_p + \frac{1}{r^2} E(r,z)$$

$$\frac{rh[E(r+h,z)+E(r-h,z)]}{rh^3} + h^2 \frac{E(r+h,z)}{k^2} + \frac{E(r,z+k)-E(r,z-k)}{k^2}$$

$$- \left[\frac{2k^2rhE(r,z)+k^2h^2E(r,z)+2rh^3E(r,z)}{rh^3k^2} \right] = i\omega\mu\eta E(r,z) + i\omega\mu J_p + \frac{1}{r^2} E(r,z)$$

$$\frac{k^2rh[E(r+h,z)+E(r-h,z)]+k^2h^2E(r+h,z)+rh^3[E(r,z+k)+E(r,z-k)]}{rh^3k^2} - i\omega\mu J_p$$

$$= \frac{2k^2rhE(r,z)+k^2h^2E(r,z)+2rh^3E(r,z)}{rh^3k^2} + i\omega\mu\eta E(r,z) + \frac{1}{r^2} E(r,z)$$

$$\frac{(k^2rh+k^2h^2)E(r+h,z)+k^2rhE(r-h,z)+rh^3E(r,z+k)+rh^3E(r,z-k)}{rh^3k^2} - i\omega\mu J_p$$

$$= E(r,z) \left[\frac{r^2(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3)+r^3h^3k^2i\omega\mu\eta+rh^3k^2}{r^3h^3k^2} \right]$$

ถ้ากำหนดให้ $c = \frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + r^3h^3k^2i\omega\mu\eta + rh^3k^2}{r^3h^3k^2}$ ดังนั้นสมการข้างต้น
เขียนได้เป็น

$$\therefore E(r, z) = \frac{(k^2rh + k^2h^2)E(r + h, z) + k^2rhE(r - h, z) + rh^3E(r, z + k) + rh^3E(r, z - k)}{crh^3k^2} - \frac{i\omega\mu J_p}{c} \quad (3-7)$$

ค่าของ c อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นเขียนได้ใหม่ในรูป $a+bi$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} c &= \frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + rh^3k^2}{r^3h^3k^2} + \frac{r^3h^3k^2i\omega\mu\eta}{r^3h^3k^2} \\ &= \frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + rh^3k^2}{r^3h^3k^2} + \omega\mu\eta i \end{aligned}$$

และเมื่อนำค่า c ไปแทนในสมการ (3-7) จะได้

$$\begin{aligned} E(r, z) &= \frac{(k^2rh + k^2h^2)E(r + h, z) + k^2rhE(r - h, z) + rh^3E(r, z + k) + rh^3E(r, z - k)}{rh^3k^2 \left[\frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + rh^3k^2}{r^3h^3k^2} + \omega\mu\eta i \right]} \\ &= \frac{(k^2rh + k^2h^2)E(r + h, z) + k^2rhE(r - h, z) + rh^3E(r, z + k) + rh^3E(r, z - k)}{rh^3k^2 \left[\frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + rh^3k^2}{r^3h^3k^2} + \omega\mu\eta i \right]} \\ &\quad \times \frac{\left[\frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + rh^3k^2}{r^3h^3k^2} - \omega\mu\eta i \right]}{\left[\frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + rh^3k^2}{r^3h^3k^2} - \omega\mu\eta i \right]} \end{aligned}$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการสำหรับการคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ดังนี้

$$\begin{aligned} AE(r, z) &= b[fE(r + h, z) + gE(r - h, z) + tE(r, z + k) + tE(r, z - k)] \\ &\quad - [fE(r + h, z) + gE(r - h, z) + tE(r, z + k) + tE(r, z - k)]\omega\mu\eta i \end{aligned} \quad (3-8)$$

โดยที่

$$J_p = 0$$

$$b = \frac{r^2(2k^2rh + k^2h^2 + 2rh^3) + rh^3k^2}{r^3h^3k^2}$$

$$A = rh^3k^2[b^2 + (\omega\mu\eta)^2]$$

$$f = k^2rh + k^2h^2$$

$$g = k^2rh$$

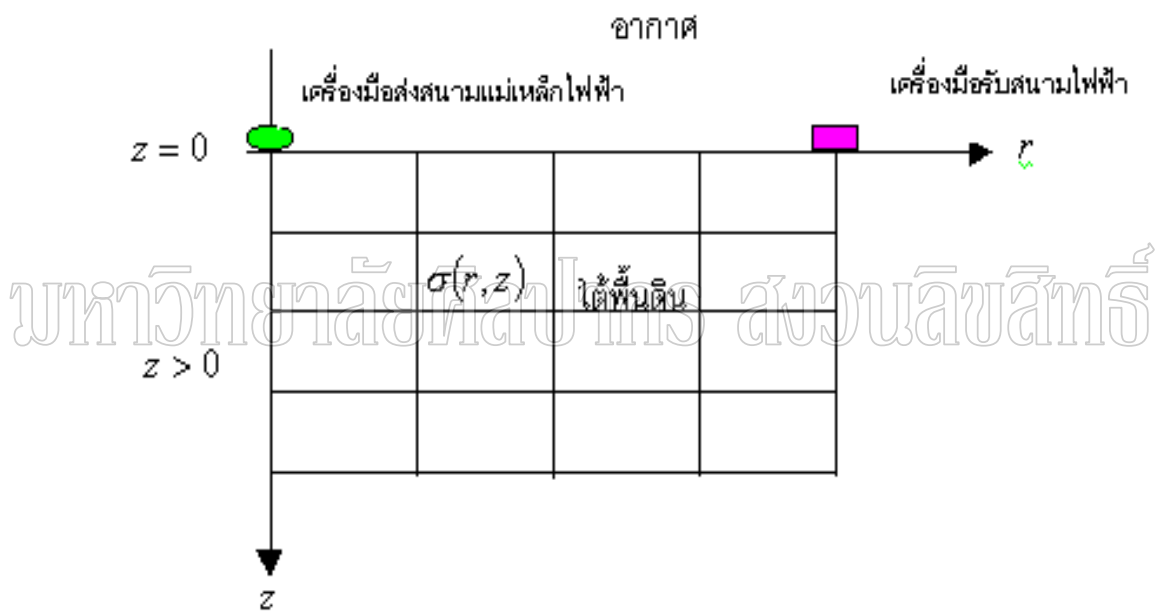
$$t = rh^3$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

บทที่ 4

การคำนวณเชิงตัวเลข

ในบทนี้จะทำการคำนวณหาปริมาณของสนามไฟฟ้า ณ บริเวณต่างๆ โดยได้ทำการแบ่งโครงสร้างหน้าตัดใต้พื้นโลกออกเป็นตารางกริด(grid) ดังรูปที่ 4-1



รูปที่ 4-1 แบบจำลองโครงสร้างพื้นโลก

และนำบริเวณที่สนใจมากำหนดตัวแปรที่ต้องการคำนวณหาค่าและค่าขอบเขตเริ่มต้น ดังรูปที่ 4-2

	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
	$0.1-0.1i$	$0.2+0.9i$	$-1.8-1.2i$	$3.1-0.4i$	$-3.0+3.8i$
E_{21}	$0.075-0.075i$	E_{22}	E_{23}	E_{24}	$-2.25+2.85i$
E_{31}	$0.050-0.050i$	E_{32}	E_{33}	E_{34}	$-1.50+1.90i$
E_{41}	$0.025-0.025i$	E_{42}	E_{43}	E_{44}	$-0.75+0.95i$
	0	0	0	0	0
	E_{51}	E_{52}	E_{53}	E_{54}	E_{55}

รูปที่ 4-2 แสดงลักษณะการแบ่งหน้าตัดพื้นโลก

ในเบื้องต้นได้กำหนดให้แบ่งบริเวณของโดเมนที่สนใจออกเป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม 16 ช่อง โดยมีจุดแลตทิซเป็น $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{55}$ ซึ่งเป็นค่าสนามไฟฟ้าที่ต้องการทราบค่า สำหรับบริเวณขอบเขตเริ่มต้นกำหนดได้ดังนี้ ที่ผิวดินค่าสนามไฟฟ้า $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}$ และ E_{15} ได้จากการวัดโดยเครื่องมือรับสนามไฟฟ้าบนผิวดิน ที่ความลึกมาก ๆ ค่าสนามไฟฟ้ามีค่าน้อยเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น $E_{51}, E_{52}, E_{53}, E_{54}$ และ E_{55} จึงมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับบริเวณขอบด้านข้างเป็นบริเวณที่ค่าสนามไฟฟ้าต้องมีค่าลดลงจากผิวดินไปสู่ดินที่มีความลึกมาก จึงได้ทำการประมาณค่าในช่วงหาค่า $E_{21}, E_{31}, E_{41}, E_{25}, E_{35}$ และ E_{45} การหาค่าสนามไฟฟ้าที่จุดต่าง ๆ ที่ยังไม่ทราบค่าในที่นี้คือ จุด $E_{22}, E_{23}, E_{24}, E_{32}, E_{33}, E_{34}, E_{42}, E_{43}$ และ E_{44} จากสมการ (3-8) โดยใช้วิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมทริกซ์ เรานำสมการ (3-9) มาเขียนใหม่ให้ง่ายขึ้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 &AE(r, z) - (bf - f\omega\mu\eta i)E(r+h, z) - (bg - g\omega\mu\eta i)E(r-h, z) \\
 &- (bt - t\omega\mu\eta i)E(r, z+k) - (bt - t\omega\mu\eta i)E(r, z-k) = 0
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

นำจุดต่าง ๆ มาแทนค่าลงในสมการ (4-1) จะได้ระบบสมการจำนวน 9 สมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่า 9 ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned}
 AE_{22} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{23} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{21} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{12} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{32} &= 0 \\
 AE_{23} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{24} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{22} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{13} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{33} &= 0 \\
 AE_{24} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{25} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{23} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{14} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{34} &= 0 \\
 AE_{32} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{33} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{31} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{22} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{42} &= 0 \\
 AE_{33} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{34} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{32} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{23} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{43} &= 0 \\
 AE_{34} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{35} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{33} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{24} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{44} &= 0 \\
 AE_{42} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{43} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{41} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{32} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{52} &= 0 \\
 AE_{43} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{44} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{42} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{33} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{53} &= 0 \\
 AE_{44} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{45} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{43} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{34} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{54} &= 0
 \end{aligned}$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

นำสมการทั้งหมดมาเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix}
 A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 E_{22} \\
 E_{23} \\
 E_{24} \\
 E_{32} \\
 E_{33} \\
 E_{34} \\
 E_{42} \\
 E_{43} \\
 E_{44}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 (bg - g\omega\mu\eta)E_{21} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{12} \\
 (bt - t\omega\mu\eta)E_{13} \\
 (bf - f\omega\mu\eta)E_{25} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{14} \\
 (bg - g\omega\mu\eta)E_{31} \\
 0 \\
 (bf - f\omega\mu\eta)E_{35} \\
 (bg - g\omega\mu\eta)E_{41} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{32} \\
 (bt - t\omega\mu\eta)E_{53} \\
 (bf - f\omega\mu\eta)E_{45} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{34}
 \end{bmatrix}$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร ลงจวนลิขสิทธิ์

ในการคำนวณได้นำโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica โดยใช้เมทริกซ์อินเวอร์ส ดังนี้

$$\begin{bmatrix}
 E_{22} \\
 E_{23} \\
 E_{24} \\
 E_{32} \\
 E_{33} \\
 E_{34} \\
 E_{42} \\
 E_{43} \\
 E_{44}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & 0 & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -bt + t\omega\mu\eta & 0 & -bg + g\omega\mu\eta & A & -bf + f\omega\mu\eta
 \end{bmatrix}^{-1}
 \begin{bmatrix}
 (bg - g\omega\mu\eta)E_{21} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{12} \\
 (bt - t\omega\mu\eta)E_{13} \\
 (bf - f\omega\mu\eta)E_{25} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{14} \\
 (bg - g\omega\mu\eta)E_{31} \\
 0 \\
 (bf - f\omega\mu\eta)E_{35} \\
 (bg - g\omega\mu\eta)E_{41} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{32} \\
 (bt - t\omega\mu\eta)E_{53} \\
 (bf - f\omega\mu\eta)E_{45} + (bt - t\omega\mu\eta)E_{34}
 \end{bmatrix}$$

ในการคำนวณได้ทำการประมาณค่า $\epsilon \approx \epsilon_0$ และ $\mu \approx \mu_0$ โดยมี ϵ_0 คือค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 8.85×10^{-12} F/m. และ μ_0 คือค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 12.57×10^{-7} H/m. และกำหนดให้ความถี่ (f) มีค่าเท่ากับ 1 Hz. ค่า r เป็นค่าของระยะเริ่มต้นที่สามารถวัดค่าสนามไฟฟ้าจากเครื่องมือส่งมีระยะทางเป็น 10 เมตร ช่วงระยะห่างที่พื้นดิน (h) มีระยะ 22.5 เมตร ระยะทางในแนวตั้ง (k) มีช่วงระยะห่าง 500 เมตร ค่าสภาพนำไฟฟ้า (σ) กำหนดให้เป็น 8 S/m. จากนั้นแทนค่าลงในสมการและดำเนินการในรูปสมการเมตริกซ์แก้สมการแล้วหาค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica ผลการคำนวณได้ค่าสนามไฟฟ้าของจุดแลตทิซต่าง ๆ ดังนี้

$$E_{22} = -0.0935321 + 0.123634 i$$

$$E_{23} = \square \square -0.292501 + 0.375958 i$$

$$E_{24} = -0.812172 + 1.0374 i$$

$$E_{32} = \square \square -0.0624057 + 0.0824394 i$$

$$E_{33} = \square \square -0.195012 + 0.250991 i$$

$$E_{34} = -0.542054 + 0.691901 i$$

$$E_{42} = \square \square -0.0312029 + 0.0412197 i$$

$$E_{43} = \square \square -0.0975062 + 0.125496 i$$

$$E_{44} = -0.271027 + 0.345951 i$$

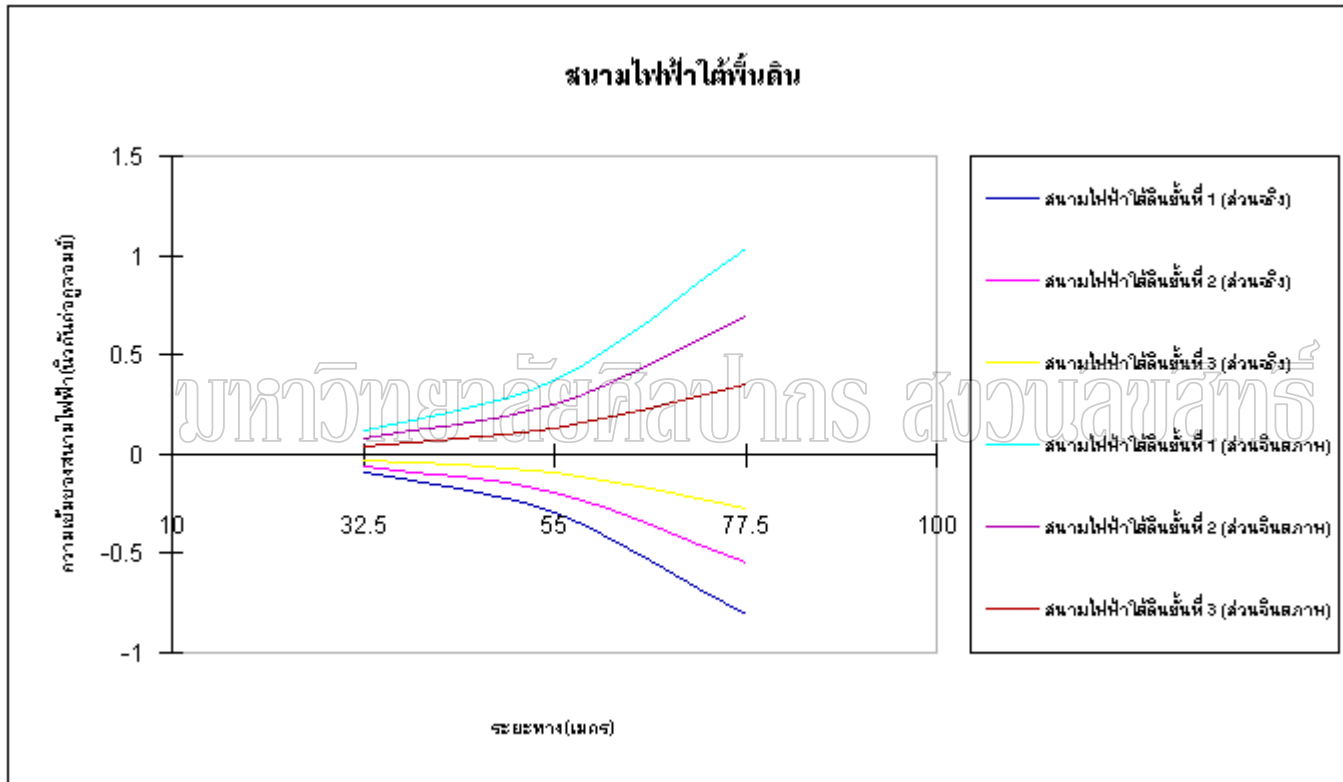
มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

จากนั้นนำค่าสนามไฟฟ้าทั้งหมดมาเขียนลงในตาราง จะได้ภาพหน้าตัดโครงสร้างใต้พื้นดินของสนามไฟฟ้างดรูปที่ 4-3

	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
	$0.1-0.1i$	$0.2+0.9i$	$-1.8-1.2i$	$3.1-0.4i$	$-3.0+3.8i$
E_{21} $0.075-0.075i$		$-0.0935321+0.123634i$	$-0.292501+0.375958i$	$-0.812172+1.0374i$	$-2.25+2.85i$ E_{25}
E_{31} $0.050-0.050i$		$-0.0624057+0.0824394i$	$-0.195012+0.250991i$	$-0.542054+0.691901i$	$-1.50+1.90i$ E_{35}
E_{41} $0.025-0.025i$		$-0.0312029+0.0412197i$	$-0.0975062+0.125496i$	$-0.271027+0.345951i$	$-0.75+0.95i$ E_{45}
	0 E_{51}	0 E_{52}	0 E_{53}	0 E_{54}	0 E_{55}

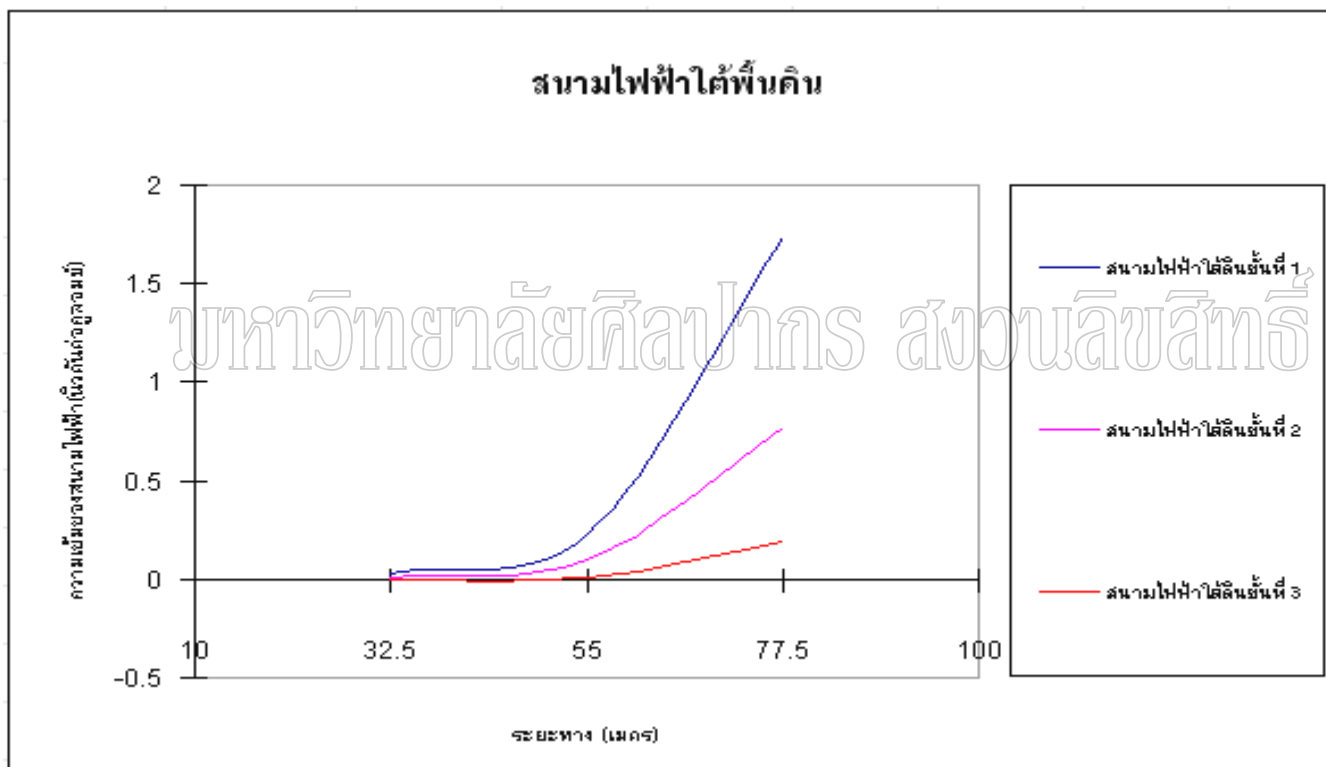
รูปที่ 4-3 แสดงผลการคำนวณค่าสนามไฟฟ้า

จากนั้นจึงนำค่าทั้งหมดมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะห่างของเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่ต่าง ๆ กัน ได้ผล ดังรูปที่ 4-4



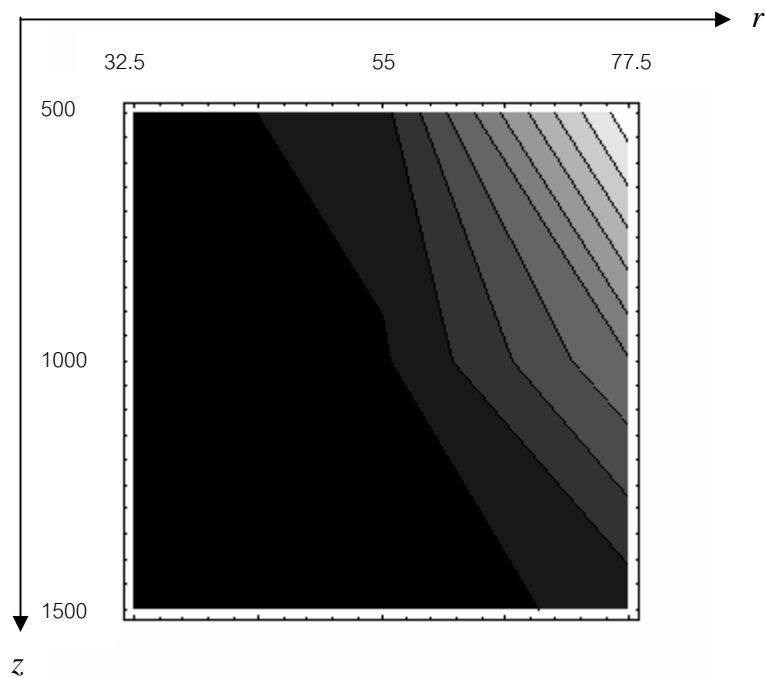
รูปที่ 4-4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

เมื่อนำข้อมูลสนามไฟฟ้ามาหาค่ากำลัง 2 ของมอดูลัส แล้วนำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะห่างของเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่ต่าง ๆ กัน ได้ผลดังรูปที่ 4-5



รูปที่ 4-5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

และเมื่อนำข้อมูลมาเขียนกราฟแบบคอนทัวร์ จะได้ผลดังรูปที่ 4-6



รูปที่ 4-6 กราฟคอนทัวร์ของกำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าแปรค่าตามระยะแนว r และ z ภาพคอนทัวร์แสดงให้เห็นถึงความเข้มของสนามไฟฟ้า โดยในได้พื้นดินชั้นที่ 1 มีความเข้มของสนามไฟฟ้ามาก รูปที่ได้จึงเป็นสีค่อนข้างสว่างเมื่อเทียบกับบริเวณใต้พื้นดินชั้นที่ 3 ซึ่งมีค่าความเข้มของสนามไฟฟ้าน้อยจึงมีสีดำ

สำหรับโครงสร้างพื้นโลกที่มีสภาพนำไฟฟ้าต่ำ $\sigma = 0.1 \text{ S/m}$. ผลการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าปรากฏดังนี้

$$E_{22} = -0.0949121 + 0.122568i$$

$$E_{23} = -0.295255 + 0.373811i$$

$$E_{24} = -0.815985 + 1.03442i$$

$$E_{32} = -0.0633269 + 0.0817276i$$

$$E_{33} = -0.196851 + 0.249558i$$

$$E_{34} = -0.544598 + 0.689909i$$

$$E_{42} = -0.0316635 + 0.0408639i$$

$$E_{43} = -0.0984254 + 0.124779i$$

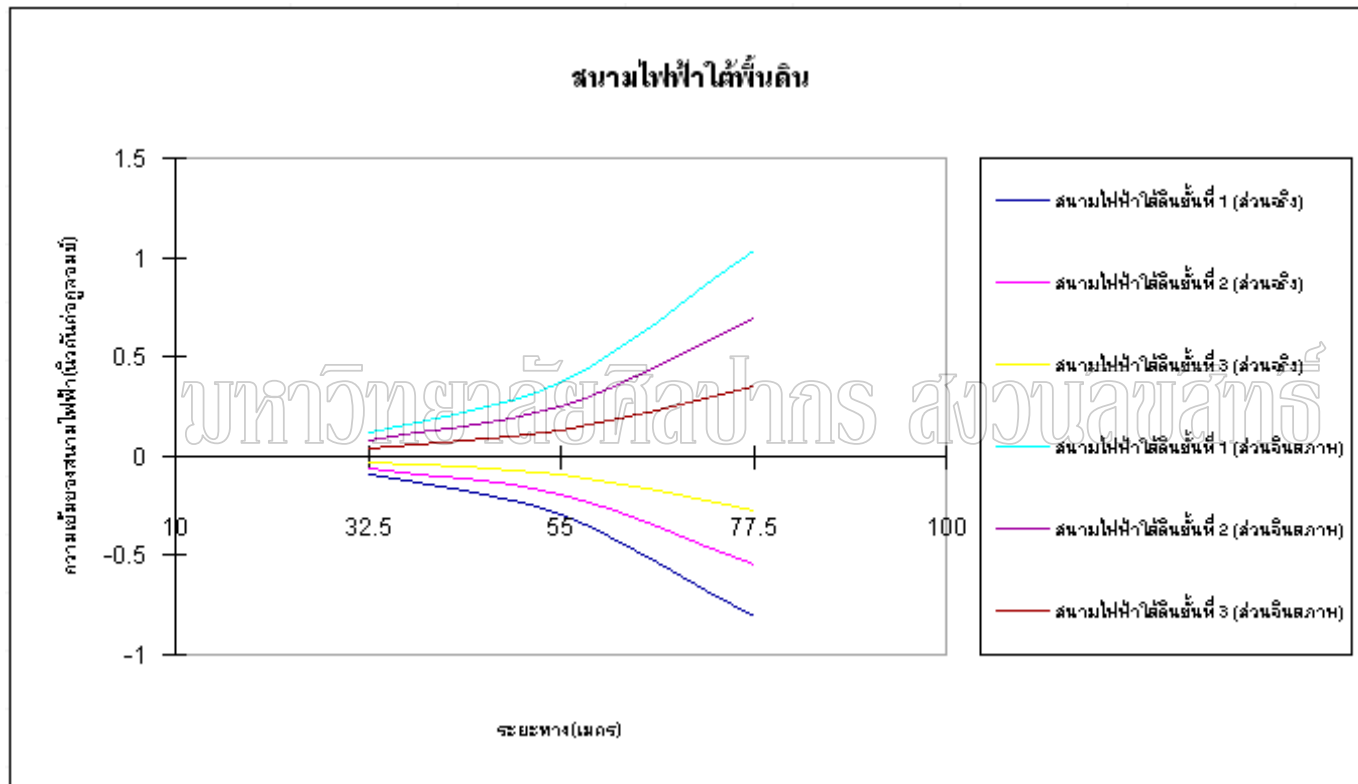
$$E_{44} = -0.272299 + 0.344954i$$

จากนั้นนำค่าสนามไฟฟ้าทั้งหมดมาเขียนลงในตาราง จะได้ภาพหน้าตัดโครงสร้างใต้พื้นดินของสนามไฟฟ้างดรูปที่ 4-7

	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
	$0.1-0.1i$	$0.2+0.9i$	$-1.8-1.2i$	$3.1-0.4i$	$-3.0+3.8i$
E_{21} $0.075-0.075i$		$-0.0949121+0.122568i$	$-0.295255+0.373811i$	$-0.815985+1.03442i$	$-2.25+2.85i$ E_{25}
E_{31} $0.050-0.050i$		$-0.0633269+0.0817276i$	$-0.196851+0.249558i$	$-0.544598+0.689909i$	$-1.50+1.90i$ E_{35}
E_{41} $0.025-0.025i$		$-0.0316635+0.0408639i$	$-0.0984254+0.124779i$	$-0.272299+0.344954i$	$-0.75+0.95i$ E_{45}
	0	0	0	0	0
	E_{51}	E_{52}	E_{53}	E_{54}	E_{55}

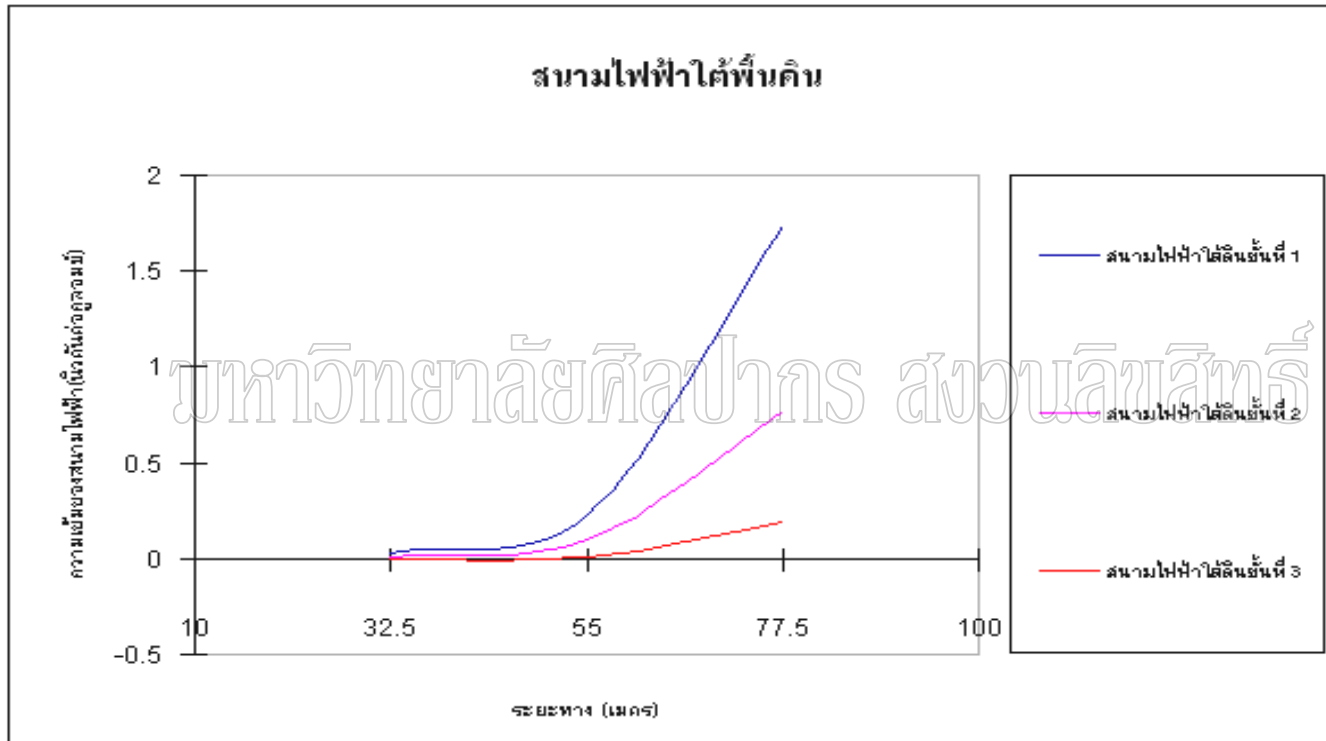
รูปที่ 4-7 แสดงผลการคำนวณค่าสนามไฟฟ้า

จากนั้นจึงนำค่าทั้งหมดมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะห่างของเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่ต่าง ๆ กัน ได้ผล ดังรูปที่ 4-8



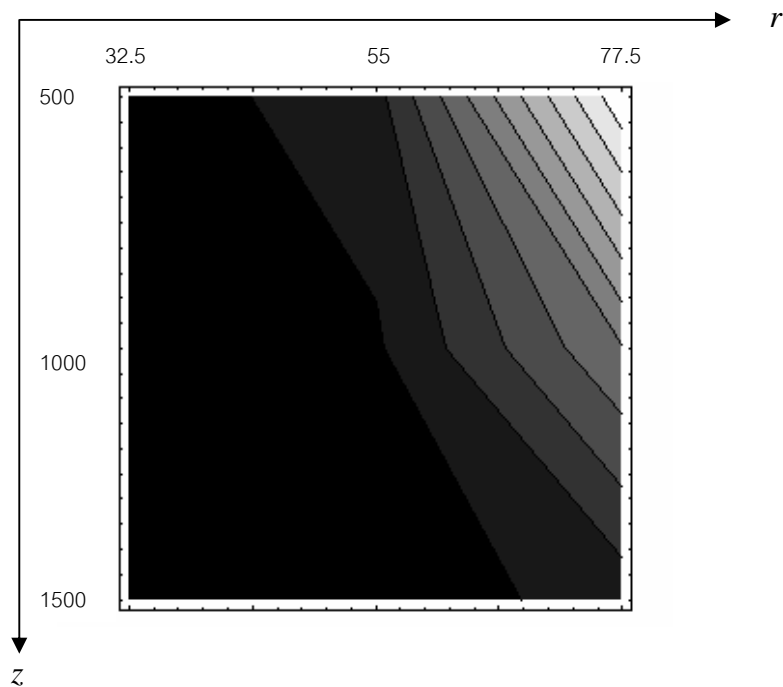
รูปที่ 4-8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

เมื่อนำข้อมูลสนามไฟฟ้ามาหาค่ากำลัง 2 ของมอดูลัส แล้วนำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะห่างของเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความลึกต่าง ๆ กัน ดังรูปที่ 4-9



รูปที่ 4-9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

และเมื่อนำข้อมูลมาเขียนกราฟแบบคอนทัวร์ จะได้ผลดังรูปที่ 4-10



รูปที่ 4-10 กราฟคอนทัวร์ของกำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าแปรค่าตามระยะแนว r และ z

ภาพคอนทัวร์แสดงให้เห็นถึงความเข้มของสนามไฟฟ้า โดยในได้พื้นดินชั้นที่ 1 มีความเข้มของสนามไฟฟ้ามก รูปที่ได้จึงเป็นสีค่อนข้างสว่างเมื่อเทียบกับบริเวณใต้พื้นดินชั้นที่ 3 ซึ่งมีค่าความเข้มของสนามไฟฟ้าน้อยจึงมีสีดำทึบ

เพื่อให้เห็นรายละเอียดของสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้น จึงได้ทำการแบ่งกริดบนพื้นที่ที่สนใจให้ละเอียดมากขึ้นดังรูปที่ 4-11 โดยแบ่งออกเป็น 64 ช่อง แล้วดำเนินการกำหนดค่าตัวแปรให้กับจุดแลตทิซ เพื่อใช้ในการกำหนดสมการเชิงผลต่าง

	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{17}	E_{18}	E_{19}	
	$0.1-0.1i$	$-0.5-0.1i$	$0.2+0.9i$	$1.2-0.8i$	$-1.8-1.2i$	$-0.7+2.7i$	$3.1-0.4i$	$-1.2-3.5i$	$-3.0+3.8i$	
E_{21}	$0.0875-0.0875i$	E_{22}	E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}	E_{27}	E_{28}	$-2.625+3.325i$	E_{29}
E_{31}	$0.075-0.075i$	E_{32}	E_{33}	E_{34}	E_{35}	E_{36}	E_{37}	E_{38}	$-2.25+2.85i$	E_{39}
E_{41}	$0.0625-0.0625i$	E_{42}	E_{43}	E_{44}	E_{45}	E_{46}	E_{47}	E_{48}	$-1.875+2.375i$	E_{49}
E_{51}	$0.050-0.050i$	E_{52}	E_{53}	E_{54}	E_{55}	E_{56}	E_{57}	E_{58}	$-1.50+1.90i$	E_{59}
E_{61}	$0.0375-0.0375i$	E_{62}	E_{63}	E_{64}	E_{65}	E_{66}	E_{67}	E_{68}	$-1.125+1.425i$	E_{69}
E_{71}	$0.025-0.025i$	E_{72}	E_{73}	E_{74}	E_{75}	E_{76}	E_{77}	E_{78}	$-0.75+0.95i$	E_{79}
E_{81}	$0.0125-0.0125i$	E_{82}	E_{83}	E_{84}	E_{85}	E_{86}	E_{87}	E_{88}	$-0.375+0.475i$	E_{89}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	E_{91}	E_{92}	E_{93}	E_{94}	E_{95}	E_{96}	E_{97}	E_{98}	E_{99}	

รูปที่ 4-11 แบ่งกริดบนพื้นที่ที่สนใจออกเป็น 64 ช่อง

ระบบสมการสำหรับคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ในรูปสมการเชิงผลต่างจำนวน 49 สมการ กำหนดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 AE_{22} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{23} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{21} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{12} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{32} &= 0 \\
 AE_{23} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{24} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{22} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{13} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{33} &= 0 \\
 AE_{24} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{25} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{23} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{14} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{34} &= 0 \\
 AE_{25} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{26} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{24} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{15} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{35} &= 0 \\
 AE_{26} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{27} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{25} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{16} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{36} &= 0 \\
 AE_{27} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{28} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{26} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{17} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{37} &= 0 \\
 AE_{28} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{29} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{27} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{18} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{38} &= 0 \\
 AE_{29} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{33} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{31} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{27} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{47} &= 0 \\
 AE_{33} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{34} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{32} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{23} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{43} &= 0 \\
 AE_{34} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{35} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{33} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{24} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{44} &= 0 \\
 AE_{35} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{36} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{34} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{25} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{45} &= 0 \\
 AE_{36} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{37} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{35} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{26} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{46} &= 0 \\
 AE_{37} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{38} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{36} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{27} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{47} &= 0 \\
 AE_{38} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{39} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{37} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{28} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{48} &= 0 \\
 AE_{47} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{43} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{41} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{27} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{57} &= 0 \\
 AE_{43} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{44} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{42} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{33} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{53} &= 0 \\
 AE_{44} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{45} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{43} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{34} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{54} &= 0 \\
 AE_{45} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{46} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{44} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{35} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{55} &= 0 \\
 AE_{46} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{47} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{45} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{36} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{56} &= 0 \\
 AE_{47} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{48} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{46} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{37} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{57} &= 0 \\
 AE_{48} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{49} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{47} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{38} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{58} &= 0 \\
 AE_{52} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{53} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{51} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{42} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{62} &= 0 \\
 AE_{53} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{54} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{52} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{43} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{63} &= 0 \\
 AE_{54} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{55} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{53} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{44} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{64} &= 0 \\
 AE_{55} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{56} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{54} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{45} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{65} &= 0 \\
 AE_{56} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{57} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{55} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{46} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{66} &= 0 \\
 AE_{57} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{58} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{56} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{47} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{67} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AE_{58} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{59} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{57} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{48} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{68} &= 0 \\
AE_{62} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{63} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{61} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{52} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{72} &= 0 \\
AE_{63} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{64} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{62} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{53} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{73} &= 0 \\
AE_{64} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{65} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{63} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{54} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{74} &= 0 \\
AE_{65} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{66} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{64} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{55} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{75} &= 0 \\
AE_{66} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{67} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{65} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{56} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{76} &= 0 \\
AE_{67} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{68} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{66} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{57} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{77} &= 0 \\
AE_{68} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{69} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{67} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{58} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{78} &= 0 \\
AE_{72} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{73} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{71} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{62} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{82} &= 0 \\
AE_{72} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{74} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{72} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{63} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{83} &= 0 \\
AE_{74} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{75} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{73} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{64} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{84} &= 0 \\
AE_{75} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{76} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{74} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{65} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{85} &= 0 \\
AE_{76} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{77} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{75} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{66} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{86} &= 0 \\
AE_{77} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{78} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{76} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{67} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{87} &= 0 \\
AE_{78} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{79} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{77} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{68} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{88} &= 0 \\
AE_{82} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{83} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{81} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{72} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{92} &= 0 \\
AE_{83} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{84} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{82} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{73} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{93} &= 0 \\
AE_{84} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{85} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{83} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{74} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{94} &= 0 \\
AE_{85} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{86} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{84} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{75} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{95} &= 0 \\
AE_{86} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{87} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{85} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{76} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{96} &= 0 \\
AE_{87} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{88} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{86} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{77} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{97} &= 0 \\
AE_{88} - (bf - f\omega\mu\eta)E_{89} - (bg - g\omega\mu\eta)E_{87} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{78} - (bt - t\omega\mu\eta)E_{98} &= 0
\end{aligned}$$

นำระบบสมการทั้งหมดมาเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ และเมื่อทำการประมาณค่า $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ และ $\mu \approx \mu_0$ โดยมี ε_0 คือค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 8.85×10^{-12} F/m. และ μ_0 คือค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 12.57×10^{-7} H/m. และกำหนดให้ความถี่ (f) มีค่าเท่ากับ 1 Hz. ค่า r เป็นค่าของระยะเริ่มต้นที่สามารถวัดค่าสนามไฟฟ้าจากเครื่องมือส่งมีระยะทางเป็น 10 เมตร ช่วงระยะห่างที่พื้นดิน (h) มีระยะ 11.25 เมตร ระยะทางในแนวตั้ง (h) มีช่วงระยะห่าง 250 เมตร ค่าสภาพนำไฟฟ้า (σ) กำหนดให้เป็น 8 S/m. จากนั้นแทนค่าอื่นลงในสมการและดำเนินการในรูปสมการเมทริกซ์

แก้สมการแล้วหาค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica ได้ผล ค่า
สนามไฟฟ้าที่จุดแลตทิซต่าง ๆ ดังนี้

$$E_{22} = -0.0125446 + 0.0233191i$$

$$E_{23} = -0.0667208 + 0.0894315i$$

$$E_{24} = -0.1322553 + 0.172797i$$

$$E_{25} = -0.244418 + 0.315394i$$

$$E_{26} = -0.442372 + 0.570912i$$

$$E_{27} = -0.800962 + 1.02757i$$

$$E_{28} = -1.45445 + 1.85297i$$

$$E_{32} = -0.0106398 + 0.019883i$$

$$E_{33} = -0.0573526 + 0.0763357i$$

$$E_{34} = -0.113781 + 0.14815i$$

$$E_{35} = -0.20866 + 0.269754i$$

$$E_{36} = -0.378598 + 0.486855i$$

$$E_{37} = -0.68589 + 0.877558i$$

$$E_{38} = -1.24231 + 1.5815i$$

$$E_{42} = -0.00886637 + 0.0165687i$$

$$E_{43} = -0.0477936 + 0.0636122i$$

$$E_{44} = -0.094817 + 0.123457i$$

$$E_{45} = -0.173882 + 0.224792i$$

$$E_{46} = -0.315497 + 0.405709i$$

$$E_{47} = -0.571573 + 0.731294i$$

$$E_{48} = -1.03525 + 1.31791i$$

$$E_{52} = -0.0070931 + 0.0132549i$$

$$E_{53} = -0.0382349 + 0.0508898i$$

$$E_{54} = -0.0758536 + 0.0987657i$$

$$E_{55} = -0.139106 + 0.179834i$$

$$E_{56} = -0.252398 + 0.324567i$$

$$E_{57} = -0.457258 + 0.585035i$$

$$E_{58} = -0.828203 + 1.05433i$$

$$E_{62} = -0.00531982 + 0.0099412i$$

$$E_{63} = -0.0286762 + 0.0381673i$$

$$E_{64} = -0.0568902 + 0.0740743i$$

$$E_{65} = -0.104329 + 0.134875i$$

$$E_{66} = -0.189298 + 0.243425i$$

$$E_{67} = -0.342944 + 0.438776i$$

$$E_{68} = -0.621152 + 0.790746i$$

$$E_{72} = -0.0035655 + 0.00662747i$$

$$E_{73} = -0.0191174 + 0.0254449i$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

$$E_{74} = -0.0379268 + 0.0493829i$$

$$E_{75} = -0.0695528 + 0.0899169i$$

$$E_{76} = -0.126199 + 0.162284i$$

$$E_{77} = -0.228629 + 0.292518i$$

$$E_{78} = -0.414101 + 0.527164i$$

$$E_{82} = -0.00177327 + 0.00331373i$$

$$E_{83} = -0.00955872 + 0.0127224i$$

$$E_{84} = -0.0189634 + 0.0246914i$$

$$E_{85} = -0.0347764 + 0.0449585i$$

$$E_{86} = -0.0630995 + 0.0811418i$$

$$E_{87} = -0.114315 + 0.146259i$$

$$E_{88} = -0.207051 + 0.263582i$$

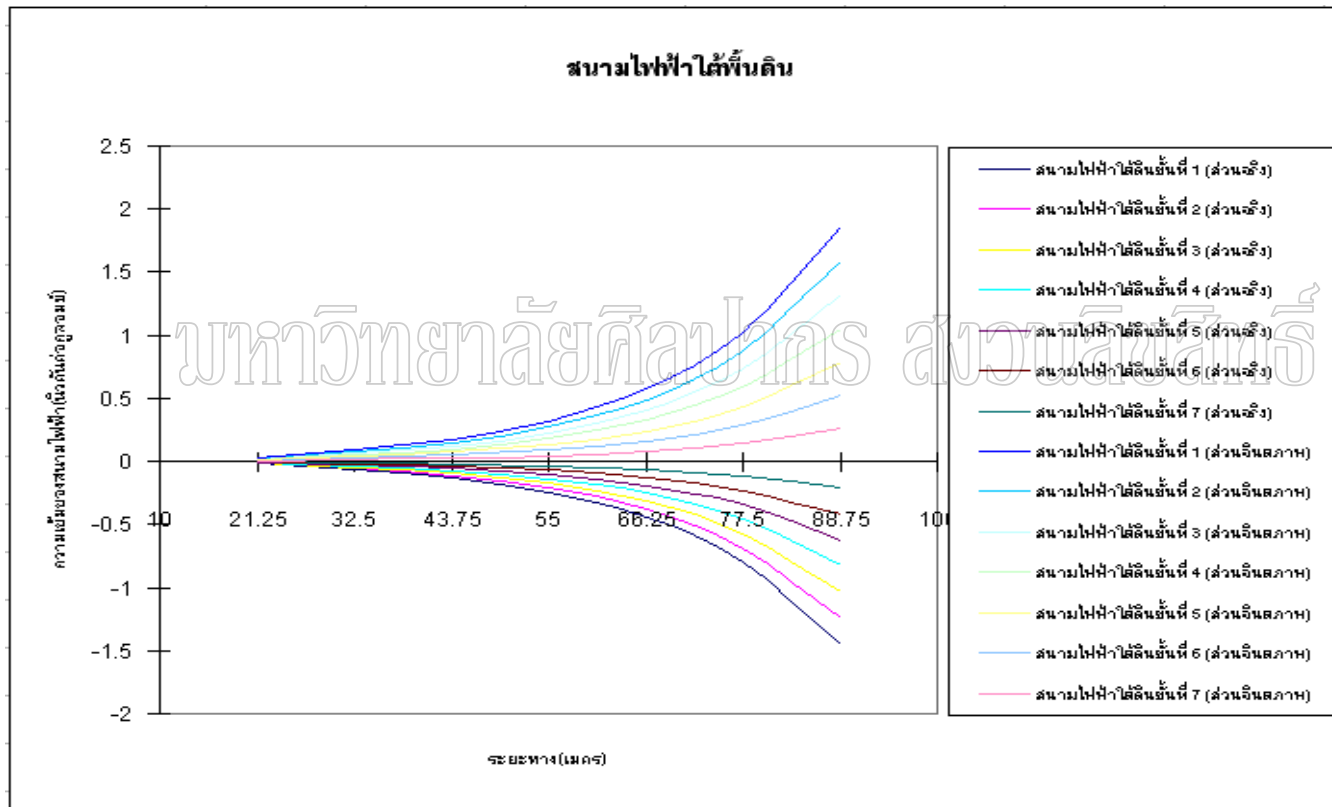
มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

และนำค่าสนามไฟฟ้าทั้งหมดมาเขียนลงในตารางกริดแสดงได้ดังรูปที่ 4-12 ดังนี้

	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{17}	E_{18}	E_{19}	
	$0.1-0.1i$	$-0.5-0.1i$	$0.2+0.9i$	$1.2-0.8i$	$-1.8-1.2i$	$-0.7+2.7i$	$3.1-0.4i$	$-1.2-3.5i$	$-3.0+3.8i$	
E_{21} $0.0875-0.0875i$	-0.0129446+0.0233191i -0.0667208+0.0894315i		-0.1322553+0.172797i -0.244418+0.315394i		-0.442372+0.570912i -0.800962+1.02757i		-1.45445+1.85297i			$-2.625+3.325i$ E_{29}
E_{31} $0.075-0.075i$	-0.0106398+0.019883i -0.0573526+0.0763357i		-0.113781+0.14815i -0.20866+0.269754i		-0.378598+0.486855i -0.68589+0.877558i		-1.24231+1.5815i			$-2.25+2.85i$ E_{39}
E_{41} $0.0625-0.0625i$	-0.00886637+0.0165687i -0.0477936+0.0636122i		-0.094817+0.123457i -0.173882+0.224795i		-0.315497+0.405709i -0.571573+0.731294i		-1.03525+1.3179i			$-1.875+2.375i$ E_{49}
E_{51} $0.050-0.050i$	-0.0070931+0.0132549i -0.0382349+0.0508898i		-0.0758536+0.0987657i -0.139106+0.179834i		-0.252398+0.324567i -0.457258+0.583035i		-0.828203+1.05433i			$-1.50+1.90i$ E_{59}
E_{61} $0.0375-0.0375i$	-0.00531982+0.0099412i -0.0286762+0.0381673i		-0.0568902+0.0740743i -0.104329+0.134875i		-0.189298+0.243425i -0.342944+0.438776i		-0.624452+0.790746i			$-1.125+1.425i$ E_{69}
E_{71} $0.025-0.025i$	-0.0035622+0.00662747i -0.0191174+0.0254449i		-0.0379268+0.0493829i -0.0695528+0.0899169i		-0.126199+0.162284i -0.228629+0.292518i		-0.414101+0.527167i			$-0.75+0.95i$ E_{79}
E_{81} $0.0125-0.0125i$	-0.00177327+0.00331373i -0.00955872+0.0127224i		-0.0189634+0.0246914i -0.0347764+0.0449585i		-0.0630995+0.0811418i -0.114315+0.146259i		-0.207051+0.263582i			$-0.375+0.475i$ E_{89}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	E_{91}	E_{92}	E_{93}	E_{94}	E_{95}	E_{96}	E_{97}	E_{98}	E_{99}	

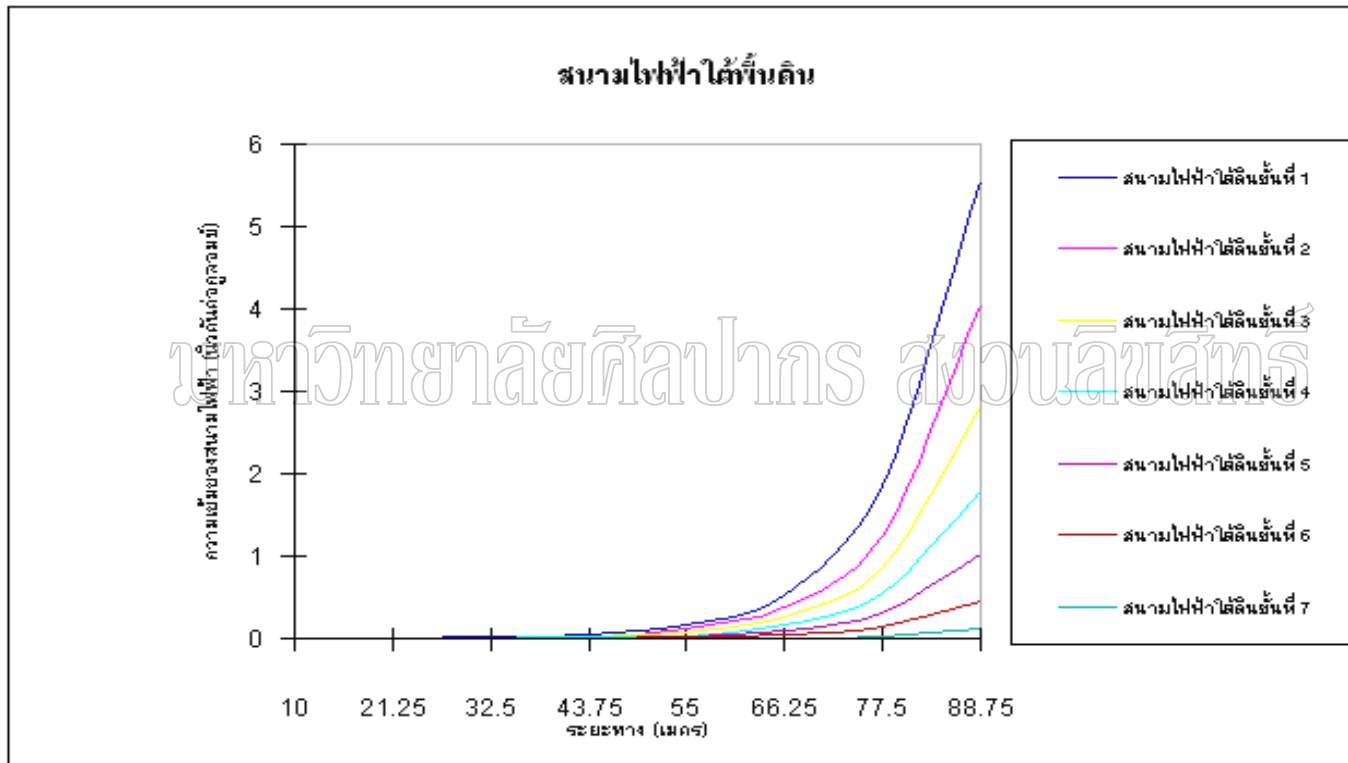
รูปที่ 4-12 แสดงผลการคำนวณค่าสนามไฟฟ้า

และเมื่อนำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่ต่าง ๆ แยกแสดงกราฟส่วนจริงและส่วนจินตภาพออกจากกัน จะได้ผลดังกราฟรูปที่ 4-13



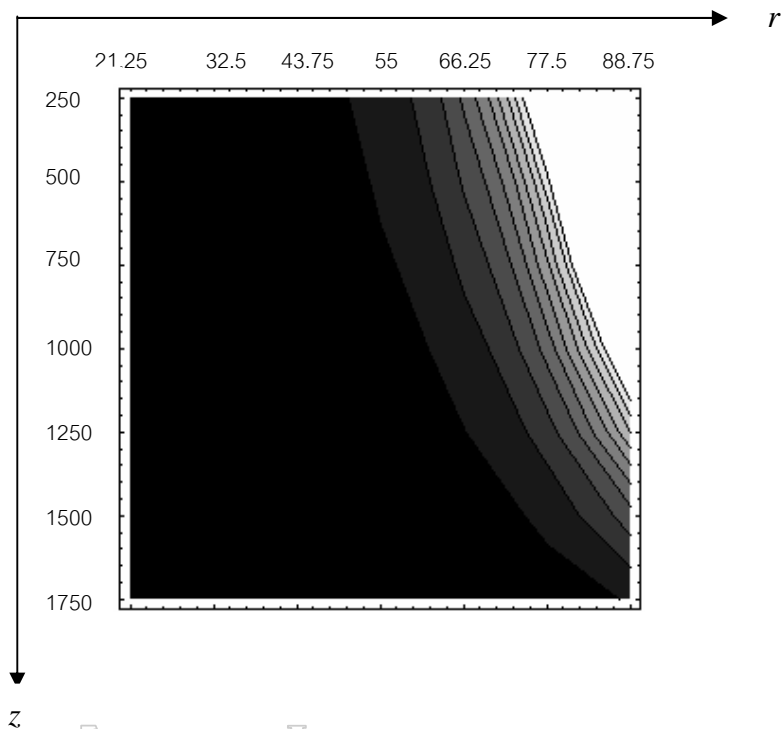
รูปที่ 4-13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

เมื่อนำข้อมูลสนามไฟฟ้ามาหาค่ามอดูลัสและยกกำลัง 2 แล้วนำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะห่างของเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความลึกต่าง ๆ กัน ดังรูปที่ 4-14



รูปที่ 4-14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

และเมื่อนำข้อมูลมาเขียนกราฟแบบคอนทัวร์ จะได้ผลดังรูปที่ 4-15



รูปที่ 4-15 กราฟคอนทัวร์ของกำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าแปรค่าตามระยะแนว r และ z

ภาพคอนทัวร์แสดงให้เห็นถึงความเข้มของสนามไฟฟ้า โดยในใต้พื้นดินชั้นที่ 1 จะมีสีอ่อนกว่าชั้นอื่น เนื่องจากมีค่าความเข้มของสนามไฟฟ้ามากและบริเวณใต้พื้นดินชั้นที่ 7 เป็นสีดำเข้มเนื่องจากค่าความเข้มของสนามไฟฟ้ามีค่าน้อยมาก ดังนั้นจากรูป 4-15 จึงแสดงถึงระดับความเข้มของสนามไฟฟ้า หากเปรียบเทียบภาพที่ปรากฏในรูปที่ 4-6 และรูปที่ 4-15 จะเห็นได้ชัดว่า ยิ่งแบ่งกริดละเอียดมากขึ้นเท่าใด ผลที่ได้จะให้ความละเอียดของภาพมากขึ้น เป็นลำดับ

สำหรับโครงสร้างพื้นโลกที่มีสภาพนำไฟฟ้าต่ำ $\sigma = 0.1$ S/m. ผลการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าที่จุดแลตทิซต่างๆ ปรากฏดังนี้

$$E_{22} = -0.0132321 + 0.0228003 i$$

$$E_{23} = -0.0680555 + 0.0884056 i$$

$$E_{24} = -0.134657 + 0.171168 i$$

$$E_{25} = -0.247496 + 0.313003 i$$

$$E_{26} = -0.446573 + 0.567642 i$$

$$E_{27} = -0.806076 + 1.02358 i$$

$$E_{28} = -1.45922 + 1.84923 i$$

$$E_{32} = -0.0112222 + 0.0194427 i$$

$$E_{33} = -0.058482 + 0.0754656 i$$

$$E_{34} = -0.115557+0.146773 i$$

$$E_{35} = -0.211247+0.267739 i$$

$$E_{36} = -0.382105+0.484117 i$$

$$E_{37} = -0.690109+0.874255 i$$

$$E_{38} = -1.24611+1.57851 i$$

$$E_{42} = -0.00935167+0.0162018 i$$

$$E_{43} = -0.0487347+0.0628871 i$$

$$E_{44} = -0.0962967+0.122309 i$$

$$E_{45} = -0.176038+0.223114 i$$

$$E_{46} = -0.31842+0.403427 i$$

$$E_{47} = -0.575089+0.728542 i$$

$$E_{48} = -1.03842+1.31542 i$$

$$E_{52} = -0.00748134+0.0129614 i$$

$$E_{53} = -0.0389878+0.0503097 i$$

$$E_{54} = -0.0770374+0.0978474 i$$

$$E_{55} = -0.14083+0.178491 i$$

$$E_{56} = -0.254736+0.322742 i$$

$$E_{57} = -0.460071+0.582834 i$$

$$E_{58} = -0.83074+1.05234 i$$

$$E_{62} = -0.005611+0.00972108 i$$

$$E_{63} = -0.0292408+0.0377323 i$$

$$E_{64} = -0.057778+0.0733855 i$$

$$E_{65} = -0.105623+0.133868 i$$

$$E_{66} = -0.191052+0.242056 i$$

$$E_{67} = -0.345053+0.437125 i$$

$$E_{68} = -0.623055+0.789253 i$$

$$E_{72} = -0.00374067+0.00648072 i$$

$$E_{73} = -0.0194939+0.0251548 i$$

$$E_{74} = -0.0385187+0.0489237 i$$

$$E_{75} = -0.0704151+0.0892456 i$$

$$E_{76} = -0.127368+0.161371 i$$

$$E_{77} = -0.230035+0.291417 i$$

$$E_{78} = -0.41537+0.526168 i$$

$$E_{82} = -0.00187033+0.00324036 i$$

$$E_{83} = -0.00974695+0.0125774 i$$

$$E_{84} = -0.0192593+0.0244618 i$$

$$E_{85} = -0.0352076+0.0446228 i$$

$$E_{86} = -0.0636839+0.0806854 i$$

$$E_{87} = -0.115018+0.145708 i$$

$$E_{88} = -0.207685+0.263084 i$$

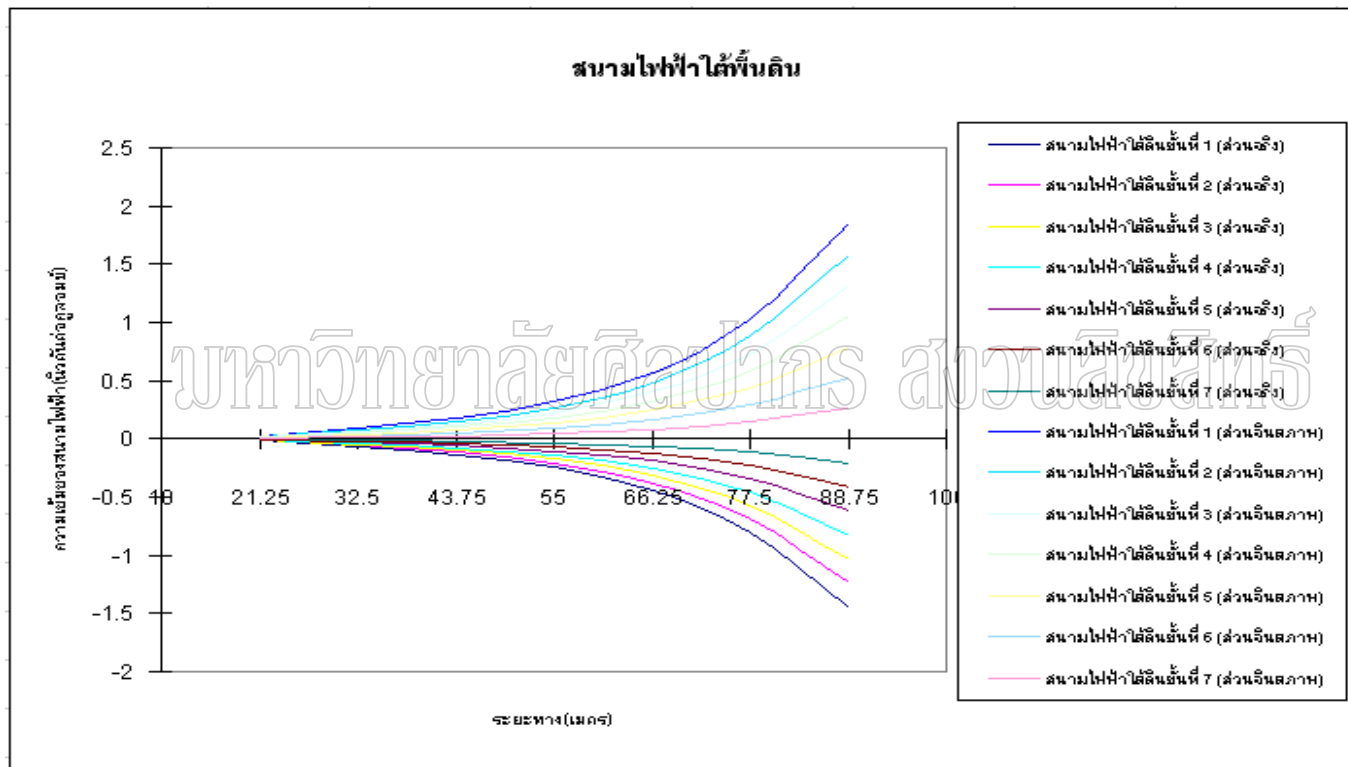
มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

และนำค่าสนามไฟฟ้าทั้งหมดมาเขียนลงในตารางกริดแสดงได้ดังรูปที่ 4-16 ดังนี้

	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{17}	E_{18}	E_{19}	
	$0.1-0.1i$	$-0.5-0.1i$	$0.2+0.9i$	$1.2-0.8i$	$-1.8-1.2i$	$-0.7+2.7i$	$3.1-0.4i$	$-1.2-3.5i$	$-3.0+3.8i$	
E_{21} $0.0875-0.0875i$	$-0.0132321+0.0228003i$	$-0.0680555+0.0884036i$	$-0.134657+0.171168i$	$-0.247496+0.313003i$	$-0.446573+0.567642i$	$-0.806076+1.02358i$	$-1.45922+1.84923i$			$-2.625+3.925i$ E_{29}
E_{31} $0.075-0.075i$	$-0.0112222+0.194427i$	$-0.058482+0.0754656i$	$-0.115557+0.146773i$	$-0.211247+0.267739i$	$-0.382105+0.484117i$	$-0.690109+0.874255i$	$-1.24611+1.57851i$			$-2.25+2.85i$ E_{39}
E_{41} $0.0625-0.0625i$	$-0.00985167+0.01620018i$	$-0.0487347+0.0628871i$	$-0.0962967+0.122309i$	$-0.176308+0.223114i$	$-0.31842+0.403427i$	$-0.573089+0.728542i$	$-1.03842+1.31542i$			$-1.875+2.375i$ E_{49}
E_{51} $0.050-0.050i$	$-0.00748134+0.0129614i$	$-0.0389878+0.0503097i$	$-0.0770374+0.0978474i$	$-0.14083+0.178491i$	$-0.254736+0.322742i$	$-0.460071+0.582834i$	$-0.83074+1.05234i$			$-1.50+1.90i$ E_{59}
E_{61} $0.0375-0.0375i$	$-0.005611+0.00972108i$	$-0.0292408+0.0377323i$	$-0.057778+0.0733855i$	$-0.105623+0.133868i$	$-0.191052+0.242056i$	$-0.343053+0.437125i$	$-0.62305+0.789253i$			$-1.125+1.425i$ E_{69}
E_{71} $0.025-0.025i$	$-0.00374067+0.00648072i$	$-0.0194939+0.0251548i$	$-0.0385187+0.0489237i$	$-0.0704151+0.0892456i$	$-0.127366+0.161371i$	$-0.230035+0.291417i$	$-0.41537+0.526168i$			$-0.75+0.95i$ E_{79}
E_{81} $0.0125-0.0125i$	$-0.00187033+0.00324036i$	$-0.00974695+0.0125774i$	$-0.0192593+0.0244618i$	$-0.0352076+0.0446228i$	$-0.0636839+0.0806854i$	$-0.115018+0.145708i$	$-0.207685+0.263084i$			$-0.375+0.475i$ E_{89}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	E_{91}	E_{92}	E_{93}	E_{94}	E_{95}	E_{96}	E_{97}	E_{98}	E_{99}	

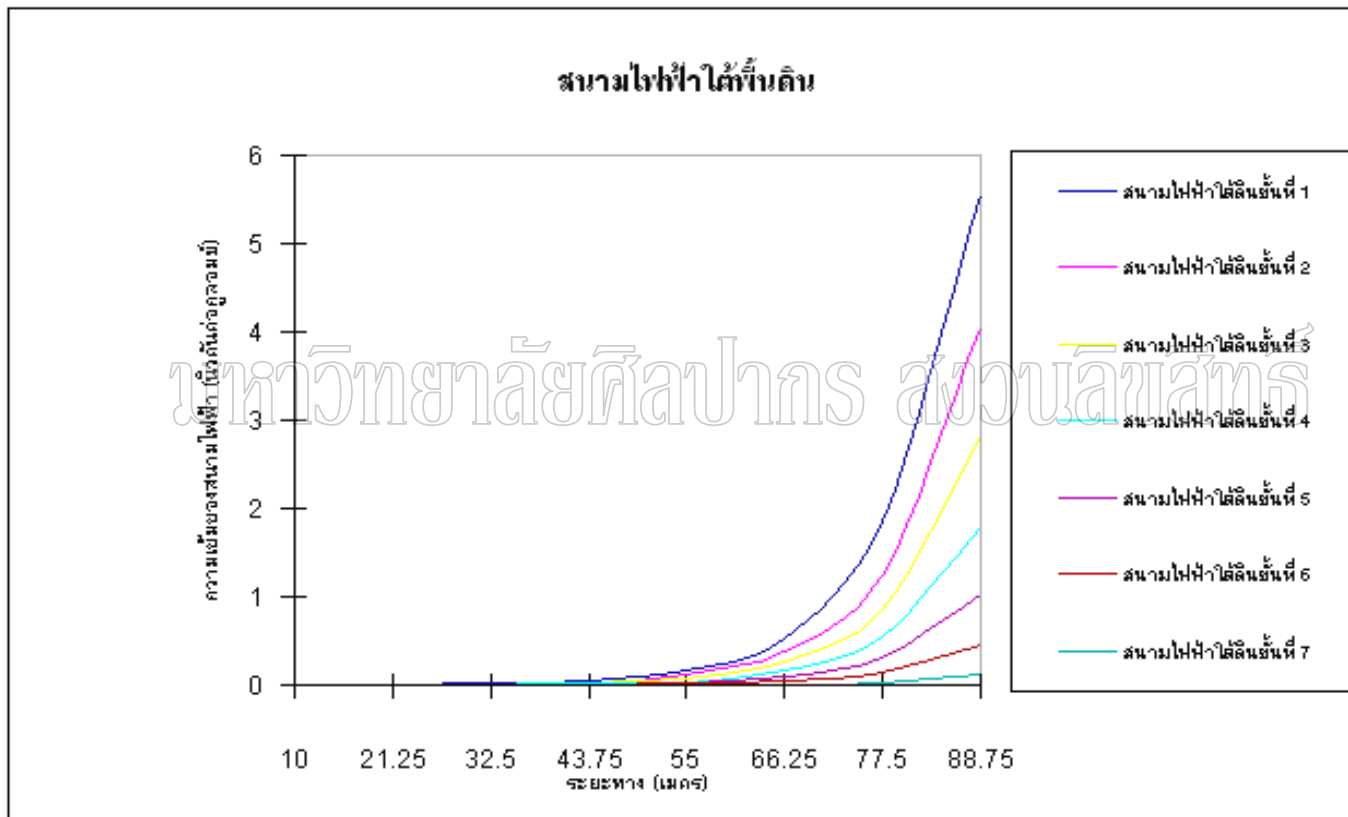
รูปที่ 4-16 แสดงผลการคำนวณค่าสนามไฟฟ้า

และเมื่อนำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่ต่าง ๆ แยกแสดงกราฟส่วนจริงและส่วนจินตภาพออกจากกัน จะได้ผลดังกราฟรูปที่ 4-17



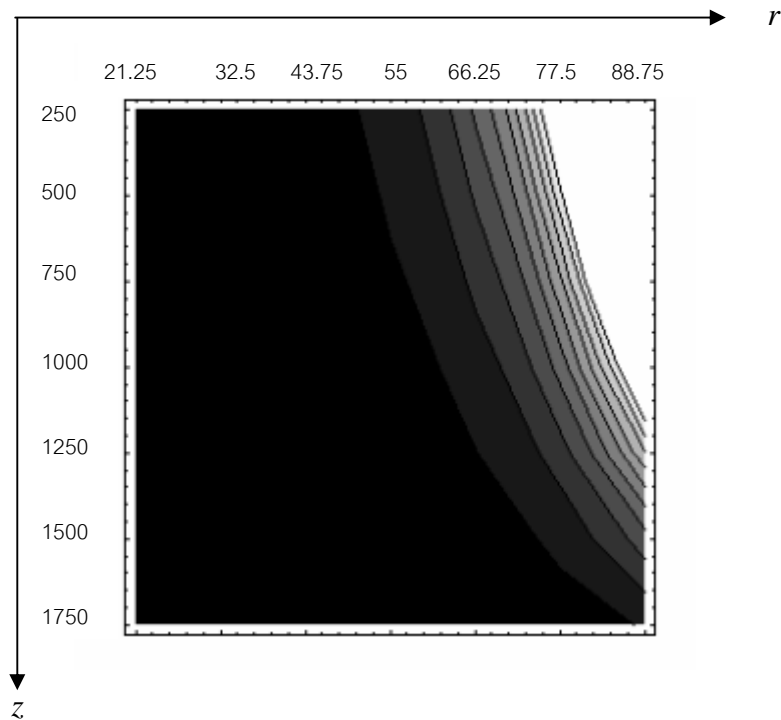
รูปที่ 4-17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่ง และรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

เมื่อนำข้อมูลสนามไฟฟ้ามาหาค่ามอดูลัสและยกกำลัง 2 แล้วนำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและระยะห่างของเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่ต่าง ๆ กัน ดังรูปที่ 4-18



รูปที่ 4-18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าและระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

และเมื่อนำข้อมูลมาเขียนกราฟแบบคอนทัวร์ จะได้ผลดังรูปที่ 4-19



รูปที่ 4-19 กราฟคอนทัวร์ของกำลัง 2 ของมอดูลัสของสนามไฟฟ้าแปรค่าตามระยะแนว r และ z

ภาพคอนทัวร์แสดงให้เห็นถึงความเข้มของสนามไฟฟ้า โดยในได้พื้นดินชั้นที่ 1 จะมีสีอ่อนกว่าชั้นอื่น เนื่องจากมีค่าความเข้มของสนามไฟฟ้ามากและบริเวณใต้พื้นดินชั้นที่ 7 เป็นสีดำเข้มเนื่องจากค่าความเข้มของสนามไฟฟ้ามีค่าน้อยมาก ดังนั้นจากรูป 4-19 จึงแสดงถึงระดับความเข้มของสนามไฟฟ้าที่บริเวณต่าง ๆ

บทที่ 5

วิจารณ์และสรุปผลการวิจัย

ในการศึกษาปรากฏการณ์ธรรมชาติรอบตัวเรา มีวิธีการต่าง ๆ หลายวิธี ได้แก่ การสังเกต การทดลอง การใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอการศึกษาปรากฏการณ์ธรรมชาติของสนามไฟฟ้า ด้วยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยสมการของแมกซ์เวลล์ ซึ่งเป็นระบบสมการเวกเตอร์ใน 3 มิติ ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในการแก้สมการเวกเตอร์ เพื่อหาค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทำได้ยากมาก ดังนั้นในงานวิจัยส่วนใหญ่ ใช้วิธีการสร้างสมการให้อยู่ในรูปสเกลาร์ โดยแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ออกมาพิจารณา ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ทำได้ด้วยการประมาณอนุพันธ์ย่อยด้วยผลหารเชิงผลต่าง และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะถูกเปลี่ยนไปเป็นสมการเชิงผลต่าง ซึ่งมีรูปแบบที่ง่าย

สารนิพนธ์ฉบับนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย โดยสมมติให้มีเครื่องมือส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่บนผิวดิน และมีเครื่องมือรับสนามไฟฟ้าอยู่ที่ผิวดินห่างออกไปจากเครื่องมือส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นระยะ r เมตร กำหนดระยะทางในแนวตั้งลึกลงไปใต้ผิวดินเป็น z เมตร กำหนดให้ใต้ผิวดินมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ z คือ $\sigma(r,z)$ ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้สนใจบริเวณใต้ผิวดินที่มี เครื่องมือรับ-ส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้า จึงได้ทำการแบ่งบริเวณดังกล่าวเป็นตารางสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ภายในขอบเขตที่กำหนด โดยในตัวอย่างแรกได้ทำการแบ่งช่วงระยะทางจากเครื่องมือส่งและรับสนามไฟฟ้าออกเป็น 4 ช่วง โดยแบ่งให้มีระยะห่าง 22.5 เมตร และทำการแบ่งช่วงในแนวตั้งออกเป็น 4 ช่วงเท่ากัน โดยในแต่ละช่วงให้มีระยะห่าง 500 เมตร จากนั้นนำจุดต่าง ๆ ที่ได้มาแทนลงในสมการเชิงผลต่าง ในที่นี้จะได้ทั้งหมด 9 สมการ มีตัวแปรไม่ทราบค่า 9 ตัว เนื่องจากมีจุดภายในที่เกิดจากการตัดกันของเส้นอยู่ 9 จุด แล้วจึงนำสมการทั้งหมดมาสร้างเป็นสมการเมทริกซ์ เพื่อหาคำตอบโดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica คำตอบที่ได้เป็นค่าสนามไฟฟ้าซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วน คือส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ค่าส่วนจริงของสนามไฟฟ้ามีค่าลดลงเมื่อระยะ r เพิ่มขึ้น แต่ในกรณีของส่วนจินตภาพของสนามไฟฟ้าจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อระยะ r เพิ่มขึ้น ในตัวอย่างต่อมาเพื่อให้ความ

ละเอียดของสนามไฟฟ้ามีมากขึ้น จึงทำการแบ่งช่วงระยะ r และ z ให้ถี่มากขึ้น โดยกำหนดให้ระยะทางระหว่างเครื่องมือส่งและรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า แบ่งออกเป็นช่วงโดยมีระยะห่าง 11.25 เมตร และทำการแบ่งช่วงในแนวตั้งออกเป็นช่วงให้ถี่ขึ้นโดยให้มีระยะห่างระหว่างช่วงเป็น 250 เมตร แล้วดำเนินการตามขั้นตอนเช่นเดียวกับตัวอย่างแรก คือ กำหนดจุดและนำมา สร้างเป็นสมการเมทริกซ์ และคำนวณค่าสนามไฟฟ้าออกมา ค่าตอบที่ได้มีความละเอียดและถูกต้องมากขึ้นกว่าในตัวอย่างแรก และเมื่อนำค่าสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณมาหาค่ากำลังสองของมอดูลัสแล้วนำมาเขียนกราฟแบบคอนทัวร์โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica ผลที่ได้จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเมื่อมีความถี่มากขึ้น ค่าสนามไฟฟ้ายิ่งลดลง และในแนวระดับเมื่อระยะ r เพิ่มมากขึ้นถึงประมาณ $r = 80$ ค่าสนามไฟฟ้าที่ตอบสนองจากพื้นดินมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นที่อยู่ใกล้เคียง

งานที่คาดว่าจะดำเนินต่อไปในอนาคต ได้แก่ การศึกษาลักษณะของสนามไฟฟ้าโดยอาศัยวิธีการสมการเชิงผลต่าง ในกรณีที่มีวัตถุตัวนำไฟฟ้าฝังอยู่ใต้พื้นดิน ปริมาณของสนามไฟฟ้าจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยเฉพาะบริเวณที่เป็นวัตถุตัวนำไฟฟ้าที่ฝังอยู่

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

บรรณานุกรม

- [1] Banerjee, B., Sengupta, B.J., and Pal, B. P. Apparent resistivity of a multilayered earth with a layer having exponential varying conductivity. Geophysical Prospecting, 28(1980) : 435-452
- [2] Chumchob, N. Mathematical modeling of electromagnetic sounding for a conductive 3-D circular cylinder body embedded in a conducting half-space. M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2000.
- [3] Edwards, R.N., and Nabighian, M.N. The magnetometric resistivity method. Soc. Expl. Geophys.,1991.
- [4] Goldberg, S. Difference Equation., John wiley&Son,Inc., 50-63,1958.
- [5] Ketchanwit, P. Time domain electromagnetic response in heterogeneous media. M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2001.
- [6] Mickens, R.E. Difference Equations. Van Nostrand Reinhold, 12, 1990.
- [7] Scarborough, J.B. Numerical Mathematical Analysis. The Johns Hopkins Press, 391-407, 1966.
- [8] Siew, P.F., and Yooyuanyong, S. The electromagnetic response of a disk beneath an exponentially varying conductive overburden. J. Australian Mathematical Society., Series B, 41 (2000) : E1-E28.
- [9] Stoyer, C. H., and Wait, J. R. Resistivity probing of an exponential earth with a homogeneous overburden. Geophysics, 15 (1977) : 11-18.

ภาคผนวก

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

ภาคผนวก ก

โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมนเป็น 16 ช่อง ($\sigma = 8 \text{ S/m.}$)

การคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า ทำได้โดยการแบ่งบริเวณโดเมนออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมจำนวน 16 ช่อง โดยภายในมีจุดแลตทิซอยู่ 9 จุด ดังรูป 4-1 จากนั้นทำการประมาณค่า $\epsilon \approx \epsilon_0$ และ $\mu \approx \mu_0$ โดยมี ϵ_0 คือค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m.}$ และ μ_0 คือค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $12.57 \times 10^{-7} \text{ H/m.}$ และกำหนดให้ความถี่ (f) มีค่าเท่ากับ 1 Hz. ค่า r เป็นค่าของระยะเริ่มต้นที่สามารถวัดค่าสนามไฟฟ้าจากเครื่องมือส่งมีระยะทางเป็น 10 เมตร ช่วงระยะห่างที่พื้นดิน (h) มีระยะ 22.5 เมตร ระยะทางในแนวดิ่ง (k) มีช่วงระยะห่าง 500 เมตร ค่า σ กำหนดให้เป็น 8 S/m. เมื่อแทนค่าลงในสมการ(4-1) และดำเนินการในรูปสมการเมตริกซ์แก้สมการแล้วหาค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica ซึ่งตัวโปรแกรมเขียนได้ ดังนี้

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \times \pi [r] \times 1 \\ \epsilon &= 8.85 \times (10^{-12}) \\ \mu &= 12.57 \times (10^{-7}) \\ r &= 10 \\ h &= 22.5 \\ k &= 500 \\ \sigma &= 8 \\ \eta &= \sigma + (\omega \times \epsilon \times \mathbf{I}) \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}) + (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{h}^2) \\ \mathbf{g} &= \mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \\ \mathbf{b} &= \\ &= \frac{(\mathbf{r}^2 \times ((2 \times \mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}) + (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{h}^2) + (2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3))) + (\mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2)}{\mathbf{r}^3 \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2 \times (\mathbf{b}^2 + (\omega^2 \times \mu^2 \times \eta^2)) \\ \mathbf{A} & \\ 9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \mathbf{i} & \\ \mathbf{L1} &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \times \omega \times \mu \times \eta \times \mathbf{I}) \\ -3.36431 \times 10^6 + 11550.8 \mathbf{i} & \end{aligned}$$

$$\mathbf{L2} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{I})$$

$$-1.03517 \times 10^6 + 3554.08 \text{ ı}$$

$$\mathbf{L3} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{I})$$

$$-2096.22 + 7.19702 \text{ ı}$$

$$\mathbf{L4} = (\mathbf{b} \times \mathbf{f}) - (\mathbf{f} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{I})$$

$$3.36431 \times 10^6 - 11550.8 \text{ ı}$$

$$\mathbf{L5} = (\mathbf{b} \times \mathbf{g}) - (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{I})$$

$$1.03517 \times 10^6 - 3554.08 \text{ ı}$$

$$\mathbf{L6} = (\mathbf{b} \times \mathbf{t}) - (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{I})$$

$$2096.22 - 7.19702 \text{ ı}$$

$$\mathbf{m}_1 = \{ \{ \mathbf{A}, \mathbf{L1}, 0, \mathbf{L3}, 0, 0, 0, 0, 0 \},$$

$$\{ \mathbf{L2}, \mathbf{A}, \mathbf{L1}, 0, \mathbf{L3}, 0, 0, 0, 0 \},$$

$$\{ 0, \mathbf{L2}, \mathbf{A}, 0, 0, \mathbf{L3}, 0, 0, 0 \},$$

$$\{ \mathbf{L3}, 0, 0, \mathbf{A}, \mathbf{L1}, 0, \mathbf{L3}, 0, 0 \},$$

$$\{ 0, \mathbf{L3}, 0, \mathbf{L2}, \mathbf{A}, \mathbf{L1}, 0, \mathbf{L3}, 0 \},$$

$$\{ 0, 0, \mathbf{L3}, 0, \mathbf{L2}, \mathbf{A}, 0, 0, \mathbf{L3} \},$$

$$\{ 0, 0, 0, \mathbf{L3}, 0, 0, \mathbf{A}, \mathbf{L1}, 0 \},$$

$$\{ 0, 0, 0, 0, \mathbf{L3}, 0, \mathbf{L2}, \mathbf{A}, \mathbf{L1} \},$$

$$\{ 0, 0, 0, 0, 0, \mathbf{L3}, 0, \mathbf{L2}, \mathbf{A} \} \}$$

$$\{ \{ 9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı}, -3.36431 \times 10^6 + 11550.8 \text{ ı},$$

$$0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0, 0, 0, 0, 0 \},$$

$$\{ -1.03517 \times 10^6 + 3554.08 \text{ ı}, 9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı},$$

$$-3.36431 \times 10^6 + 11550.8 \text{ ı}, 0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı},$$

$$0, 0, 0, 0 \}, \{ 0, -1.03517 \times 10^6 + 3554.08 \text{ ı},$$

$$9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı}, 0, 0,$$

$$-2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0, 0, 0 \}, \{ -2096.22 + 7.19702 \text{ ı},$$

$$0, 0, 9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı},$$

$$-3.36431 \times 10^6 + 11550.8 \text{ ı}, 0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0, 0 \},$$

$$\{ 0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0, -1.03517 \times 10^6 + 3554.08 \text{ ı},$$

$$9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı},$$

$$-3.36431 \times 10^6 + 11550.8 \text{ ı}, 0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0 \},$$

$$\{ 0, 0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0, -1.03517 \times 10^6 + 3554.08 \text{ ı},$$

$$9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı}, 0, 0,$$

$$-2096.22 + 7.19702 \text{ ı} \}, \{ 0, 0, 0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı},$$

$$0, 0, 9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı},$$

$$-3.36431 \times 10^6 + 11550.8 \text{ ı}, 0 \},$$

$$\{ 0, 0, 0, 0, -2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0,$$

$$-1.03517 \times 10^6 + 3554.08 \text{ ı}, 9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı},$$

$$-3.36431 \times 10^6 + 11550.8 \text{ ı} \}, \{ 0, 0, 0, 0, 0,$$

$$-2096.22 + 7.19702 \text{ ı}, 0, -1.03517 \times 10^6 + 3554.08 \text{ ı},$$

$$9.64435 \times 10^6 + 1.58038 \times 10^{-9} \text{ ı} \} \}$$

บทความวิชาการ สวทช.ลิขสิทธิ์

$$E_{11} = 0.1 - 0.1 I$$

$$E_{12} = 0.2 + 0.9 I$$

$$E_{13} = -1.8 - 1.2 I$$

$$E_{14} = 3.1 - 0.4 I$$

$$E_{15} = -3.0 + 3.8 I$$

$$E_{21} = 0.075 - 0.075 I$$

$$E_{25} = -2.25 + 2.85 I$$

$$E_{31} = 0.05 - 0.05 I$$

$$E_{35} = -1.5 + 1.9 I$$

$$E_{41} = 0.025 - 0.025 I$$

$$E_{45} = -0.75 + 0.95 I$$

$$E_{51} = 0$$

$$E_{52} = 0$$

$$E_{53} = 0$$

$$E_{54} = 0$$

$$E_{55} = 0$$

$$\{ (L5 \times E_{21}) + (L6 \times E_{12}), L6 \times E_{13}, (L4 \times E_{25}) + (L6 \times E_{14}), \\ L5 \times E_{31}, 0, L4 \times E_{35}, (L5 \times E_{41}) + (L6 \times E_{52}), L6 \times E_{53}, \\ (L4 \times E_{45}) + (L6 \times E_{54}) \}$$

$$\{ 77797.1 - 76019.3 i, -3781.84 - 2502.51 i, \\ -7.53028 \times 10^6 + 9.61341 \times 10^6 i, 51580.9 - 51936.3 i, \\ 0, -5.02452 \times 10^6 + 6.40951 \times 10^6 i, \\ 25790.5 - 25968.2 i, 0, -2.51226 \times 10^6 + 3.20476 \times 10^6 i \}$$

$$\text{Inverse}[m_1]. \{ (L5 \times E_{21}) + (L6 \times E_{12}), L6 \times E_{13}, \\ (L4 \times E_{25}) + (L6 \times E_{14}), L5 \times E_{31}, 0, L4 \times E_{35}, \\ (L5 \times E_{41}) + (L6 \times E_{52}), L6 \times E_{53}, (L4 \times E_{45}) + (L6 \times E_{54}) \}$$

$$\{-0.0935321 + 0.123634 i, \\ -0.292501 + 0.375958 i, -0.812172 + 1.0374 i, \\ -0.0624057 + 0.0824394 i, -0.195012 + 0.250991 i, \\ -0.542054 + 0.691901 i, -0.0312029 + 0.0412197 i, \\ -0.0975062 + 0.125496 i, -0.271027 + 0.345951 i \}$$

ภาคผนวก ข

โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมนเป็น 16 ช่อง ($\sigma = 0.1$ S/m.)

การคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า ทำได้โดยการแบ่งบริเวณโดเมนออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมจำนวน 16 ช่อง โดยภายในมีจุดแลตทิซอยู่ 9 จุด ดังรูป 4-1 จากนั้นทำการประมาณค่า $\epsilon \approx \epsilon_0$ และ $\mu \approx \mu_0$ โดยมี ϵ_0 คือค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 8.85×10^{-12} F/m. และ μ_0 คือค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 12.57×10^{-7} H/m. และกำหนดให้ความถี่ (f) มีค่าเท่ากับ 1 Hz. ค่า r เป็นค่าของระยะเริ่มต้นที่สามารถวัดค่าสนามไฟฟ้าจากเครื่องมือส่งมีระยะทางเป็น 10 เมตร ช่วงระยะห่างที่พื้นดิน (h) มีระยะ 22.5 เมตร ระยะทางในแนวตั้ง (k) มีช่วงระยะห่าง 500 เมตร ค่า σ กำหนดให้เป็น 0.1 S/m. เมื่อแทนค่าลงในสมการ(4-1) และดำเนินการในรูปสมการเมตริกซ์แก้สมการแล้วหาค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica ซึ่งตัวโปรแกรมเขียนได้ ดังนี้

$$L2 = -(\mathbf{b} \times \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \times \mathbf{a} \times \mu \times \eta \times \mathbf{I})$$

$$-1.03517 \times 10^6 + 44.426 \text{ ๓}$$

$$L3 = -(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \times \mathbf{a} \times \mu \times \eta \times \mathbf{I})$$

$$-2096.22 + 0.0899627 \text{ ๓}$$

$$L4 = (\mathbf{b} \times \mathbf{f}) - (\mathbf{f} \times \mathbf{a} \times \mu \times \eta \times \mathbf{I})$$

$$3.36431 \times 10^6 - 144.385 \text{ ๓}$$

$$L5 = (\mathbf{b} \times \mathbf{g}) - (\mathbf{g} \times \mathbf{a} \times \mu \times \eta \times \mathbf{I})$$

$$1.03517 \times 10^6 - 44.426 \text{ ๓}$$

$$L6 = (\mathbf{b} \times \mathbf{t}) - (\mathbf{t} \times \mathbf{a} \times \mu \times \eta \times \mathbf{I})$$

$$2096.22 - 0.0899627 \text{ ๓}$$

$$m_1 = \{\{\mathbf{A}, L1, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0\},$$

$$\{L2, \mathbf{A}, L1, 0, L3, 0, 0, 0, 0\},$$

$$\{0, L2, \mathbf{A}, 0, 0, L3, 0, 0, 0\},$$

$$\{L3, 0, 0, \mathbf{A}, L1, 0, L3, 0, 0\},$$

$$\{0, L3, 0, L2, \mathbf{A}, L1, 0, L3, 0\},$$

$$\{0, 0, L3, 0, L2, \mathbf{A}, 0, 0, L3\},$$

$$\{0, 0, 0, L3, 0, 0, \mathbf{A}, L1, 0\},$$

$$\{0, 0, 0, 0, L3, 0, L2, \mathbf{A}, L1\},$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, L2, \mathbf{A}\}$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

```

{{(9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ,
  -3.36431×106 + 144.385 ĩ, 0,
  -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0)},
{-1.03517×106 + 44.426 ĩ, 9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ,
  -3.36431×106 + 144.385 ĩ, 0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ,
  0, 0, 0, 0}, {0, -1.03517×106 + 44.426 ĩ,
  9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ, 0,
  0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0, 0, 0)},
{-2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0, 0,
  9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ,
  -3.36431×106 + 144.385 ĩ, 0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ,
  0, 0}, {0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0,
  -1.03517×106 + 44.426 ĩ, 9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ,
  -3.36431×106 + 144.385 ĩ, 0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0},
{0, 0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0, -1.03517×106 + 44.426 ĩ,
  9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ,
  0, 0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ},
{0, 0, 0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0, 0,
  9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ,
  -3.36431×106 + 144.385 ĩ, 0},
{0, 0, 0, 0, -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0,
  -1.03517×106 + 44.426 ĩ, 9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ,
  -3.36431×106 + 144.385 ĩ}, {0, 0, 0, 0, 0,
  -2096.22 + 0.0899627 ĩ, 0, -1.03517×106 + 44.426 ĩ,
  9.64423×106 + 1.97547×10-11 ĩ}}

```

$$E_{11} = 0.1 - 0.1 I$$

$$E_{12} = 0.2 + 0.9 I$$

$$E_{13} = -1.8 - 1.2 I$$

$$E_{14} = 3.1 - 0.4 I$$

$$E_{15} = -3.0 + 3.8 I$$

$$E_{21} = 0.075 - 0.075 I$$

$$E_{25} = -2.25 + 2.85 I$$

$$E_{31} = 0.05 - 0.05 I$$

$$E_{35} = -1.5 + 1.9 I$$

$$E_{41} = 0.025 - 0.025 I$$

$$E_{45} = -0.75 + 0.95 I$$

$$E_{51} = 0$$

$$E_{52} = 0$$

$$E_{53} = 0$$

$$E_{54} = 0$$

$$E_{55} = 0$$

$$\{ (L5 \times E_{21}) + (L6 \times E_{12}), L6 \times E_{13}, (L4 \times E_{25}) + (L6 \times E_{14}),$$

$$L5 \times E_{31}, 0, L4 \times E_{35}, (L5 \times E_{41}) + (L6 \times E_{52}), L6 \times E_{53},$$

$$(L4 \times E_{45}) + (L6 \times E_{54}) \}$$

$$\{ 78053.9 - 75754.7 i, -3773.31 - 2515.31 i,$$

$$-7.56279 \times 10^6 + 9.58777 \times 10^6 i, 51756.4 - 51760.8 i,$$

$$0, -5.04619 \times 10^6 + 6.39241 \times 10^6 i,$$

$$25878.2 - 25880.4 i, 0, -2.5231 \times 10^6 + 3.1962 \times 10^6 i \}$$

$$\text{Inverse}[m_1] \cdot \{ (L5 \times E_{21}) + (L6 \times E_{12}), L6 \times E_{13},$$

$$(L4 \times E_{25}) + (L6 \times E_{14}), L5 \times E_{31}, 0, L4 \times E_{35},$$

$$(L5 \times E_{41}) + (L6 \times E_{52}), L6 \times E_{53}, (L4 \times E_{45}) + (L6 \times E_{54}) \}$$

$$\{-0.0949121 + 0.122568 i,$$

$$-0.295255 + 0.373811 i, -0.815985 + 1.03442 i,$$

$$-0.0633269 + 0.0817276 i, -0.196851 + 0.249558 i,$$

$$-0.544598 + 0.689909 i, -0.0316635 + 0.0408639 i,$$

$$-0.0984254 + 0.124779 i, -0.272299 + 0.344954 i \}$$

ภาคผนวก ค

โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมนเป็น 64 ช่อง ($\sigma = 8 \text{ S/m.}$)

การคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า ทำได้โดยการแบ่งบริเวณโดเมนออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมจำนวน 64 ช่อง โดยภายในมีจุดแลตทิซอยู่ 49 จุด ดังรูป 4-1 จากนั้นทำการประมาณค่า $\epsilon \approx \epsilon_0$ และ $\mu \approx \mu_0$ โดยมี ϵ_0 คือค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m.}$ และ μ_0 คือค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $12.57 \times 10^{-7} \text{ H/m.}$ และกำหนดให้ความถี่ (f) มีค่าเท่ากับ 1 Hz. ค่า r เป็นค่าของระยะเริ่มต้นที่สามารถวัดค่าสนามไฟฟ้าจากเครื่องมือส่งมีระยะทางเป็น 10 เมตร ช่วงระยะห่างที่พื้นดิน (h) มีระยะ 11.25 เมตร ระยะทางในแนวดิ่ง (k) มีช่วงระยะห่าง 250 เมตร ค่า σ กำหนดให้เป็น 8 S/m. เมื่อแทนค่าลงในสมการ(4-1) และดำเนินการในรูปสมการเมตริกซ์แก้สมการแล้วหาค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica ซึ่งตัวโปรแกรมเขียนได้ ดังนี้

บทความวิทยาศาสตร์ สวทช.สงวนลิขสิทธิ์

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \times \pi \times 1 \\ \epsilon &= 8.85 \times (10^{-12}) \\ \mu &= 12.57 \times (10^{-7}) \\ r &= 10 \\ h &= 11.25 \\ k &= 250 \\ \sigma &= 8 \\ \eta &= \sigma + (\omega \times \epsilon \times \mu) \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}) + (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{h}^2) \\ \mathbf{g} &= \mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \\ \mathbf{b} &= \frac{(\mathbf{r}^2 \times ((2 \times \mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}) + (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{h}^2) + (2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3))) + (\mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2)}{\mathbf{r}^3 \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2 \times (\mathbf{b}^2 + (\omega^2 \times \mu^2 \times \eta^2)) \\ \mathbf{A} &= 1.07296 \times 10^6 + 4.93868 \times 10^{-11} \mathbf{i} \\ \mathbf{L1} &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \times \omega \times \mu \times \eta \times \mathbf{I}) \\ &= -518816. + 944.054 \mathbf{i} \end{aligned}$$


```

{0, 0, 0, -244149. + 444.26 i,
 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, -244149. + 444.26 i,
 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 444.26 i,
 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

```



```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 444.26 i,
1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 444.26 i,
1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, -494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 444.26 i, 1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i,
-518816. + 944.054 i, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 444.26 i,
1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.899627 i, 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 444.26 i,
1.07296 × 106 + 4.93868 × 10-11 i, -518816. + 944.054 i},

```

บทความลิขสิทธิ์สงวนลิขสิทธิ์


```
{21076.8 - 21450.9 ĩ, 99.6899 + 444.781 ĩ,|
592.561 - 396.6 ĩ, -891.001 - 591.662 ĩ,
-343.652 + 1335.51 ĩ, 1532.28 - 200.549 ĩ,
-1.35935 × 106 + 1.72581 × 106 ĩ, 18277.8 - 18344.5 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -1.16464 × 106 + 1.48075 × 106 ĩ,
15231.5 - 15287.1 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-970537. + 1.23396 × 106 ĩ, 12185.2 - 12229.6 ĩ, 0, 0,
0, 0, 0, -776430. + 987166. ĩ, 9138.91 - 9172.23 ĩ, 0,
0, 0, 0, 0, -582322. + 740375. ĩ, 6092.61 - 6114.82 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -388215. + 493583. ĩ,
3046.3 - 3057.41 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, -194107. + 246792. ĩ}
```

```
Inverse [m2]. { (L5 × E21) + (L6 × E12), L6 × E13, L6 × E14,
L6 × E15, L6 × E16, L6 × E17, (L4 × E29) + (L6 × E18),
L5 × E31, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E39, L5 × E41, 0, 0, 0,
0, 0, L4 × E49, L5 × E51, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E59,
L5 × E61, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E69, L5 × E71, 0, 0, 0,
0, 0, L4 × E79, (L5 × E81) + (L6 × E92), L6 × E93,
L6 × E94, L6 × E95, L6 × E96, L6 × E97, (L4 × E89) + (L6 × E98) }
{-0.0125446 + 0.0233191 ĩ,
-0.0667208 + 0.0894315 ĩ, -0.132553 + 0.172797 ĩ,
-0.244418 + 0.315394 ĩ, -0.442372 + 0.570912 ĩ,
-0.800962 + 1.02757 ĩ, -1.45445 + 1.85297 ĩ,
-0.0106398 + 0.019883 ĩ, -0.0573526 + 0.0763357 ĩ,
-0.113781 + 0.14815 ĩ, -0.20866 + 0.269754 ĩ,
-0.378598 + 0.486855 ĩ, -0.68589 + 0.877558 ĩ,
-1.24231 + 1.5815 ĩ, -0.00886637 + 0.0165687 ĩ,
-0.0477936 + 0.0636122 ĩ, -0.094817 + 0.123457 ĩ,
-0.173882 + 0.224792 ĩ, -0.315497 + 0.405709 ĩ,
-0.571573 + 0.731294 ĩ, -1.03525 + 1.31791 ĩ,
-0.0070931 + 0.0132549 ĩ, -0.0382349 + 0.0508898 ĩ,
-0.0758536 + 0.0987657 ĩ, -0.139106 + 0.179834 ĩ,
-0.252398 + 0.324567 ĩ, -0.457258 + 0.585035 ĩ,
-0.828203 + 1.05433 ĩ, -0.00531982 + 0.0099412 ĩ,
-0.0286762 + 0.0381673 ĩ, -0.0568902 + 0.0740743 ĩ,
-0.104329 + 0.134875 ĩ, -0.189298 + 0.243425 ĩ,
-0.342944 + 0.438776 ĩ, -0.621152 + 0.790746 ĩ,
-0.00354655 + 0.00662747 ĩ, -0.0191174 + 0.0254449 ĩ,
-0.0379268 + 0.0493829 ĩ, -0.0695528 + 0.0899169 ĩ,
-0.126199 + 0.162284 ĩ, -0.228629 + 0.292518 ĩ,
-0.414101 + 0.527164 ĩ, -0.00177327 + 0.00331373 ĩ,
-0.00955872 + 0.0127224 ĩ, -0.0189634 + 0.0246914 ĩ,
-0.0347764 + 0.0449585 ĩ, -0.0630995 + 0.0811418 ĩ,
-0.114315 + 0.146259 ĩ, -0.207051 + 0.263582 ĩ}
```

ภาคผนวก ง

โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าสำหรับการแบ่งโดเมนเป็น 64 ช่อง ($\sigma = 0.1 \text{ S/m.}$)

การคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า ทำได้โดยการแบ่งบริเวณโดเมนออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมจำนวน 64 ช่อง โดยภายในมีจุดแสดงที่ขอยู่ 49 จุด ดังรูป 4-1 จากนั้นทำการประมาณค่า $\epsilon \approx \epsilon_0$ และ $\mu \approx \mu_0$ โดยมี ϵ_0 คือค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m.}$ และ μ_0 คือค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $12.57 \times 10^{-7} \text{ H/m.}$ และกำหนดให้ความถี่ (f) มีค่าเท่ากับ 1 รอบต่อวินาที ค่า r เป็นค่าของระยะเริ่มต้นที่สามารถวัดค่าสนามไฟฟ้าจากเครื่องมือส่งมีระยะทางเป็น 10 เมตร ช่วงระยะห่างที่พื้นดิน (h) มีระยะ 11.25 เมตร ระยะทางในแนวดิ่ง (k) มีช่วงระยะห่าง 250 เมตร ค่า σ กำหนดให้เป็น 0.1 S/m. เมื่อแทนค่าลงในสมการ(4-1) และดำเนินการในรูป สมการเมตริกซ์แก้สมการแล้วหาค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ชื่อ Mathematica ซึ่งตัวโปรแกรมเขียนได้ดังนี้

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \times \pi \times 1 \\ \epsilon &= 8.85 \times (10^{-12}) \\ \mu &= 12.57 \times (10^{-7}) \\ r &= 10 \\ h &= 11.25 \\ k &= 250 \\ \sigma &= 0.1 \\ \eta &= \sigma + (\omega \times \epsilon \times \mathbf{I}) \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}) + (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{h}^2) \\ \mathbf{g} &= \mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \\ \mathbf{b} &= \\ &= \frac{(\mathbf{r}^2 \times ((2 \times \mathbf{k}^2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}) + (\mathbf{k}^2 \times \mathbf{h}^2) + (2 \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3))) + (\mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2)}{\mathbf{r}^3 \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{r} \times \mathbf{h}^3 \times \mathbf{k}^2 \times (\mathbf{b}^2 + (\omega^2 \times \mu^2 \times \eta^2)) \\ \mathbf{A} & \\ 1.07295 \times 10^6 + 6.17335 \times 10^{-13} \mathbf{i} & \\ \mathbf{L1} &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \times \omega \times \mu \times \eta \times \mathbf{I}) \\ -518816. + 11.8007 \mathbf{i} & \end{aligned}$$


```

{0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, L2, R, L1, 0, 0, 0,
 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, L2, R, L1, 0, 0,
 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, L2, R, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, R, L1,
 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, L2, R,
 L1, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, L2,
 R, L1, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0,
 L2, R, L1, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, L3,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 L2, R, 0, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, R, L1, 0, 0, 0, 0, 0, L3, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 L3, 0, 0, 0, 0, 0, L2, R, L1, 0, 0, 0, 0, 0, L3,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

```

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์


```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 i,
 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, -518816. + 11.8007 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 i,
 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, -518816. + 11.8007 i, 0,
 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 i,
 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, -518816. + 11.8007 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 i,
 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, -518816. + 11.8007 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 i,
 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, -518816. + 11.8007 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 i,
 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, -518816. + 11.8007 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 -244149. + 5.55326 i, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i, -518816. + 11.8007 i,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

```

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

```

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงวนลิขสิทธิ์

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, -244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0},

```

บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ สงวนลิขสิทธิ์

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
-244149. + 5.55326 ĩ, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ,
-518816. + 11.8007 ĩ, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,
1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 ĩ, -518816. + 11.8007 ĩ, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -244149. + 5.55326 ĩ,

```

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี สงวนลิขสิทธิ์

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, -494.401 + 0.0112453 i, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 -244149. + 5.55326 i, 1.07295 × 106 + 6.17335 × 10-13 i}}
```

$$E_{11} = 0.1 - 0.1 I$$

$$E_{12} = -0.5 - 0.1 I$$

$$E_{13} = 0.2 + 0.9 I$$

$$E_{14} = 1.2 - 0.8 I$$

$$E_{15} = -1.8 - 1.2 I$$

$$E_{16} = -0.7 + 2.7 I$$

$$E_{17} = 3.1 - 0.4 I$$

$$E_{18} = -1.2 - 3.5 I$$

$$E_{19} = -3.0 + 3.8 I$$

$$E_{21} = 0.0875 - 0.0875 I$$

$$E_{31} = 0.075 - 0.075 I$$

$$E_{41} = 0.0625 - 0.0625 I$$

$$E_{51} = 0.050 - 0.050 I$$

$$E_{61} = 0.0375 - 0.0375 I$$

$$E_{71} = 0.025 - 0.025 I$$

$$E_{81} = 0.0125 - 0.0125 I$$

$$E_{29} = -2.625 + 3.325 I$$

$$E_{39} = -2.25 + 2.85 I$$

$$E_{49} = -1.875 + 2.375 I$$

$$E_{59} = -1.5 + 1.9 I$$

$$E_{69} = -1.125 + 1.425 I$$

$$E_{79} = -0.75 + 0.95 I$$

$$E_{89} = -0.375 + 0.475 I$$

$$E_{91} = 0$$

$$E_{92} = 0$$

$$E_{93} = 0$$

$$E_{94} = 0$$

$$E_{95} = 0$$

$$E_{96} = 0$$

$$E_{97} = 0$$

$$E_{98} = 0$$

$$E_{99} = 0$$

```
{(L5 × E21) + (L6 × E12), L6 × E13, L6 × E14, L6 × E15,
 L6 × E16, L6 × E17, (L4 × E29) + (L6 × E18), L5 × E31, 0,
 0, 0, 0, L4 × E39, L5 × E41, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E49,
 L5 × E51, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E59, L5 × E61, 0, 0, 0, 0,
 0, L4 × E69, L5 × E71, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E79,
 (L5 × E81) + (L6 × E92), L6 × E93, L6 × E94, L6 × E95,
 L6 × E96, L6 × E97, (L4 × E89) + (L6 × E98)}
```

```
{21115.3 - 21412.9 ĩ, 98.8903 + 444.959 ĩ,
593.272 - 395.534 ĩ, -889.935 - 593.261 ĩ,
-346.05 + 1334.89 ĩ, 1532.64 - 197.795 ĩ,
-1.36245 × 106 + 1.72336 × 106 ĩ, 18310.7 - 18311.6 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -1.1673 × 106 + 1.47865 × 106 ĩ,
15258.9 - 15259.6 ĩ, 0, 0, 0, 0, 0,
-972752. + 1.23221 × 106 ĩ, 12207.2 - 12207.7 ĩ, 0, 0, 0,
0, 0, -778201. + 985768. ĩ, 9155.36 - 9155.78 ĩ, 0, 0,
0, 0, 0, -583651. + 739326. ĩ, 6103.58 - 6103.85 ĩ, 0,
0, 0, 0, 0, -389101. + 492884. ĩ, 3051.79 - 3051.93 ĩ,
0, 0, 0, 0, 0, -194550. + 246442. ĩ}
```

```
Inverse [m2]. { (L5 × E21) + (L6 × E12), L6 × E13, L6 × E14,
L6 × E15, L6 × E16, L6 × E17, (L4 × E29) + (L6 × E18),
L5 × E31, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E39, L5 × E41, 0, 0, 0,
0, 0, L4 × E49, L5 × E51, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E59,
L5 × E61, 0, 0, 0, 0, 0, L4 × E69, L5 × E71, 0, 0, 0,
0, 0, L4 × E79, (L5 × E81) + (L6 × E92), L6 × E93,
L6 × E94, L6 × E95, L6 × E96, L6 × E97, (L4 × E99) + (L6 × E98) }
{-0.0132321 + 0.0228003 ĩ,
-0.0680555 + 0.0884056 ĩ, -0.134657 + 0.171168 ĩ,
-0.247496 + 0.313002 ĩ, -0.446573 + 0.567642 ĩ,
-0.806076 + 1.02358 ĩ, -1.45922 + 1.84923 ĩ,
-0.0112222 + 0.0194427 ĩ, -0.058482 + 0.0754656 ĩ,
-0.115557 + 0.146773 ĩ, -0.211247 + 0.267739 ĩ,
-0.382105 + 0.484117 ĩ, -0.690109 + 0.874255 ĩ,
-1.24611 + 1.57851 ĩ, -0.00935167 + 0.0162018 ĩ,
-0.0487347 + 0.0628871 ĩ, -0.0962967 + 0.122309 ĩ,
-0.176038 + 0.223114 ĩ, -0.31842 + 0.403427 ĩ,
-0.575089 + 0.728542 ĩ, -1.03842 + 1.31542 ĩ,
-0.00748134 + 0.0129614 ĩ, -0.0389878 + 0.0503097 ĩ,
-0.0770374 + 0.0978474 ĩ, -0.14083 + 0.178491 ĩ,
-0.254736 + 0.322742 ĩ, -0.460071 + 0.582834 ĩ,
-0.83074 + 1.05234 ĩ, -0.005611 + 0.00972108 ĩ,
-0.0292408 + 0.0377323 ĩ, -0.057778 + 0.0733855 ĩ,
-0.105623 + 0.133868 ĩ, -0.191052 + 0.242056 ĩ,
-0.345053 + 0.437125 ĩ, -0.623055 + 0.789253 ĩ,
-0.00374067 + 0.00648072 ĩ, -0.0194939 + 0.0251548 ĩ,
-0.0385187 + 0.0489237 ĩ, -0.0704151 + 0.0892456 ĩ,
-0.127368 + 0.161371 ĩ, -0.230035 + 0.291417 ĩ,
-0.41537 + 0.526168 ĩ, -0.00187033 + 0.00324036 ĩ,
-0.00974695 + 0.0125774 ĩ, -0.0192593 + 0.0244618 ĩ,
-0.0352076 + 0.0446228 ĩ, -0.0636839 + 0.0806854 ĩ,
-0.115018 + 0.145708 ĩ, -0.207685 + 0.263084 ĩ}
```

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล	นางสาวญานิศ เกิดพันธุ์
ที่อยู่	56/121-122 ถนนยิงเป้าใต้ หมู่ 5 ตำบลสนามจันทร์ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม 73000
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2543	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยรามคำแหง กรุงเทพมหานคร
พ.ศ.2545	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม

มหาวิทยาลัยศิลปากร สงวนลิขสิทธิ์