ผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

โดย

นางสาวนริศรา สุขผ่อง

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2549

ISBN 974-11-6235-9

CONSEQUENCES OF UNIFORM CONVERGENCE PROPERTIES

By

Narissara Sookpong

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2006

ISBN 974-11-6235-9

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง "ผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม" เสนอโดย นางสาวนริศรา สุขผ่อง เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....
(รองศาสตราจารย์ ดร. ศิริชัย ชินะตังกูล)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
วันที่..........เดือน..........................พ.ศ............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)
………../……………/……….

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)
………../……………/……….

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)
………../……………/……….

K 46308306 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : ผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

นริศรา สุขผ่อง : ผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (CONSEQUENCES OF UNIFORM CONVERGENCE PROPERTIES) อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ.วารี เกรอต. 67 หน้า. ISBN 974-11-6235-9

เราได้ศึกษาลำดับของจำนวนจริงและการลู่เข้ามาแล้วในวิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ระดับปริญญาโท ในสารนิพนธ์ฉบับนี้เราจะศึกษาลำดับของฟังก์ชัน อนุกรมของฟังก์ชัน และอิมพรอบเพออินทิกรัล ซึ่งซับซ้อนกว่าลำดับของจำนวนจริง โดยจะกล่าวถึงการลู่เข้าของลำดับของฟังก์ชัน อนุกรมของฟังก์ชัน และอิมพรอบเพออินทิกรัล การลู่เข้าของลำดับของฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ การลู่เข้าแบบทีละจุด และการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม ซึ่งการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มมีคุณสมบัติที่น่าสนใจในประเด็นสำคัญดังนี้ การสลับลำดับของเครื่องหมายการอินทิเกรต ($\int$) และเครื่องหมายแทนการบวก ($\sum$) ในอนุกรมของฟังก์ชันสามารถกระทำได้เช่นเดียวกับการสลับลำดับของการอินทิเกรตในอิมพรอบเพออินทิกรัล สุดท้ายจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่ใช้ในการตรวจสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม และผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม พร้อมทั้งตัวอย่างที่น่าสนใจ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2549
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์...

K 46308306 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORD : CONSEQUENCES OF UNIFORM CONVERGENCE PROPERTIES

NARISSARA SOOKPONG : CONSEQUENCES OF UNIFORM CONVERGENCE PROPERTIES. MASTER'S REPORT ADVISOR : ASSOC. PROF. WAREE KAROT. 67 pp. ISBN 974-11-6235-9

The sequences of real numbers and the convergence were studied in Mathematical Analysis course of the master program. In this project we will deeply study sequences of functions , series of functions and improper integrals which are more complicated than sequences of real numbers. We first introduce convergence of sequences and series of functions together with improper integrals. The convergence of sequences of functions is classified into two types : namely pointwise convergence and uniform convergence . The uniform convergence has important consequences such as the interchange of $\sum$ and $\int$ being permissible in series of functions. Moreover the order of integration may be interchanged in improper integrals. Finally we study theorems for testing uniform convergence and study consequences of uniform convergence.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2006

Student's signature ……………………………………………..………..……….

Master's Report Advisor's signature …………………………………..…………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์วารี เกรอต อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่างๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่าน ในภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ จนทำให้ศิษย์คนนี้ประสบความสำเร็จได้ด้วยดี

ขอขอบคุณรุ่นพี่ และเพื่อนๆ ในภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่คอยช่วยเหลือ ให้คำแนะนำในเรื่องต่าง ๆ

สุดท้ายกราบขอบพระคุณ พ่อ แม่ ที่คอยเคี่ยวเข็ญ และสนับสนุนการศึกษาจนทำให้ลูกมีวันนี้ได้

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ
(INTRODUCTION)

เราได้ศึกษาเรื่องลำดับของจำนวนจริงและการลู่เข้ามาแล้ว ในสารนิพนธ์ฉบับนี้จะกล่าวถึงลำดับของฟังก์ชัน ซึ่งซับซ้อนกว่าลำดับของจำนวนจริง โดยจะศึกษาการลู่เข้าของลำดับของฟังก์ชัน ซึ่งจะแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ การลู่เข้าแบบทีละจุด และการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม การลู่เข้า 2 ประเภทนี้มีความแตกต่างกัน กล่าวคือ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน D แล้ว f อาจจะขาดคุณสมบัติบางประการ เช่น ความต่อเนื่อง การอินทิเกรตได้ และการมีอนุพันธ์ ในขณะที่แต่ละ f_n มีคุณสมบัติเหล่านั้น แต่ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D แล้ว f จะมีคุณสมบัติดังที่กล่าวมา ทำให้ได้ผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มดังนี้

1. ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องบน D และ $f : D \to R$ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D

2. ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $f : [a,b] \to R$ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$

3. ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง $[a,b]$ ถ้า f_n' ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$

เริ่มต้นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานของลำดับของจำนวนจริง ซึ่งจะนำไปใช้ในการศึกษาลำดับของฟังก์ชันและอนุกรมของฟังก์ชัน

ต่อมาจะศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน โดยกล่าวถึงอนุกรมของจำนวนจริงซึ่งจะเกี่ยวข้องกับอนุกรมของฟังก์ชัน และจะกล่าวถึงการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน ซึ่งแบ่งเป็น 2 ประเภท เช่นเดียวกับการลู่เข้าของลำดับของฟังก์ชัน รวมทั้งศึกษาทฤษฎีบทที่ใช้ในการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน และตัวอย่างที่น่าสนใจซึ่งได้รวบรวมมาจากหนังสือต่าง ๆ ที่ยังไม่ได้มี

การเฉลยคำตอบ นอกจากนี้เมื่ออนุกรมของฟังก์ชันลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มแล้วจะมีผลสืบเนื่องตามมาในลักษณะเดียวกันกับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของลำดับของฟังก์ชันดังนี้

1. กำหนดให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบน D ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บน D แล้ว S เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D

2. กำหนดให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บน $[a,b]$ แล้ว S อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$

3. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บน $[a,b]$ และให้แต่ละ f_n' ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$

นอกจากนี้เราศึกษาอิมพรอบเพออินทิกรัล โดยเริ่มต้นจะกล่าวถึงบทนิยามของอิมพรอบเพออินทิกรัล การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มและการตรวจสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล และเมื่ออิมพรอบเพออินทิกรัลลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มก็เกิดผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัลในทำนองเดียวกันกับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของลำดับและอนุกรมของฟังก์ชันดังนี้

1. ให้ F เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและต่อเนื่องบน $[a,b]\times[c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ และสมมติให้ d เป็นซิงกูลาร์พอยท์ของ F และนิยาม f บน $[a,b]$ ดังนี้

$$f(x) = \int_c^d F(x,y)dy$$

ถ้า $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม แล้ว f ต่อเนื่องบน $[a,b]$

2. ให้ F เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและต่อเนื่องบน $[a,b]\times[c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ สมมติว่าเงื่อนไขต่อไปนี้สอดคล้อง

(1) F อินทิเกรตได้บน $[a,b]\times[c,t]$ เมื่อ $t\in[c,d)$

(2) สำหรับทุก $x\in[a,b]$ และทุก $t\in[c,d)$ จะได้ว่า $\int_c^t F(x,y)dy$ หาค่าได้

(3) $\int_a^b F(x,y)dx$ หาค่าได้ สำหรับทุก $y \in [c,d)$

ถ้า $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ เมื่อ

$$f(x) = \int_c^d F(x,y)dy$$

สำหรับทุก $x \in [a,b]$ และ

$$\int_a^b f = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b F(x,y)dxdy$$

3. ให้ F เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและ $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ ต่อเนื่องบน $[a,b] \times [c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ ถ้ามี $x_0 \in [a,b]$ ซึ่ง $\int_c^d F(x_0,y)dy$ ลู่เข้า และ $\int_c^d \dfrac{\partial F}{\partial x} dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ แล้ว $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ และถ้า

$$f(x) = \int_c^d F(x,y)dy \quad \text{เมื่อ} \quad x \in [a,b]$$

แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ และ

$$f'(x) = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dy$$

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งเนื้อหาแต่ละบทดังนี้

บทที่ 2 : กล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาลำดับของฟังก์ชันและอนุกรมของฟังก์ชัน

บทที่ 3 : ศึกษาลำดับของฟังก์ชัน การลู่เข้าของลำดับของฟังก์ชัน และผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

บทที่ 4 : ศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน โดยจะกล่าวถึงอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่งเกี่ยวข้องกับอนุกรมของฟังก์ชัน การลู่เข้าและการตรวจสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอนุกรมของฟังก์ชัน และตัวอย่างที่น่าสนใจที่ใช้การตรวจสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มในแบบต่าง ๆ

บทที่ 5 : ศึกษาอิมพรอบเพออินทิกรัล บทนิยามของอิมพรอบเพออินทิกรัล การลู่เข้าและการตรวจสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอินทิกรัล และผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล

บทที่ 2
ทฤษฎีบทพื้นฐาน
(BASIC THEOREMS)

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานของลำดับของจำนวนจริงซึ่งจะนำไปใช้ในการศึกษาลำดับและอนุกรมของฟังก์ชันในบทที่ 3 และบทที่ 4 ต่อไป ดังนั้นเราจะละการพิสูจน์และผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [4]

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้จะแทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด และเซตของจำนวนจริงด้วยสัญลักษณ์ I^+ และ R ตามลำดับ นอกจากนี้สัญลักษณ์ $A \subset B$ แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

บทนิยาม 2.1 : ลำดับของจำนวนจริง (sequences of real numbers) คือฟังก์ชันจาก I^+ ไปยัง R

ถ้า f เป็นลำดับของจำนวนจริงและ $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ เราจะเขียนแทนลำดับนี้ด้วย $\{a_n\}$

จะขอตกลงในที่นี้ว่าถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่น เมื่อกล่าวถึงลำดับจะหมายถึงลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.2 : เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ **ลู่เข้าสู่จำนวนจริง** a **(converges to** a**)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n - a| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

จะเขียนแทนความหมายตามบทนิยามข้างบนโดย $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ และเรียก a ว่า **ลิมิต (limit)** ของ $\{a_n\}$

บทนิยาม 2.3 : ถ้าลำดับมีลิมิต เรากล่าวว่าลำดับนั้นเป็น**ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** ถ้าไม่เป็นเช่นนั้น เรากล่าวว่าลำดับนั้นเป็น**ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

ทฤษฎีบท 2.4 : ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

ข้อสังเกต 2.5 : ลำดับ $\{1/n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

ทฤษฎีบท 2.6 : ลำดับ $\{c^n\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ถ้า $c \in R$ และ $|c| < 1$

ทฤษฎีบท 2.7 : ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และลำดับ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้วลำดับ $\{a_n + b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

ทฤษฎีบท 2.8 : ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และลำดับ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้วลำดับ $\{a_n b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

ทฤษฎีบท 2.9 : ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และลำดับ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b โดยที่ $b_n \neq 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $b \neq 0$ แล้วลำดับ $\{a_n/b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$

ทฤษฎีบท 2.10 : ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a , ลำดับ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b และลำดับ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ c ถ้า $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ แล้ว $a \le c \le b$

บทแทรก 2.11 : ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ และ $a \le c_n \le b$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ถ้าลำดับ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ c แล้ว $a \le c \le b$

ทฤษฎีบท 2.12 : The Squeezing Theorem

ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ l แล้วลำดับ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ l

บทนิยาม 2.13 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ มี**ขอบเขต (bounded)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \le M$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ทฤษฎีบท 2.14 : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้วลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขต

บทนิยาม 2.15 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่

(1) **เพิ่มขึ้น (increasing)** ถ้า $a_{n+1} \ge a_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$

(2) **ลดลง (decreasing)** ถ้า $a_{n+1} \le a_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$

บทนิยาม 2.16 : เราเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ที่เป็นลำดับเพิ่มขึ้นหรือลำดับลดลงว่า**ลำดับโมโนโทน (monotone sequence)**

ทฤษฎีบท 2.17 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน แล้วลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขต

บทนิยาม 2.18 : เรากล่าวว่า U เป็น**ขอบเขตบน (upper bound)** ของลำดับ $\{a_n\}$ ถ้า $a_n \le U$ สำหรับทุก $n \in I^+$

บทนิยาม 2.19 : เรากล่าวว่า L เป็น**ขอบเขตล่าง (lower bound)** ของลำดับ $\{a_n\}$ ถ้า $a_n \ge L$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ข้อสังเกต 2.20 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้วจะได้ว่า

(1) ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น แล้วลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตบน

(2) ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลดลง แล้วลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตล่าง

บทนิยาม 2.21 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง **ลำดับย่อย (subsequence)** ของลำดับ $\{a_n\}$ คือลำดับ $\{a_{n_k}\}$ เมื่อ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกซึ่ง $n_k < n_{k+1}$ ทุก $k \in I^+$

ทฤษฎีบท 2.22 : ทุกลำดับจะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับโมโนโทน

ทฤษฎีบท 2.23 : ลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.24 : The Bolzano – Weierstrass Theorem

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a<b$ แล้วทุกลำดับบนช่วง $[a,b]$ จะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าสู่จุดในช่วง $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.25 : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a แล้วทุกลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a

บทนิยาม 2.26 : เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับโคชี (Cauchy sequence)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n-a_m|<\varepsilon$ สำหรับทุก $n\geq N$ และ $m\geq N$

ทฤษฎีบท 2.27 : ทุกลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี

ทฤษฎีบท 2.28 : ทุกลำดับโคชีเป็นลำดับมีขอบเขต

ทฤษฎีบท 2.29 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n-a_m|<\varepsilon$ สำหรับทุก $n\geq N$ และ $m\geq N$

บทนิยาม 2.30 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ มี**ลิมิตเป็นบวกอนันต์ (positively infinite limit)** ถ้าสำหรับแต่ละ $M>0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $a_n>M$ สำหรับทุก $n\geq N$ และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

และกล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ มี**ลิมิตเป็นลบอนันต์ (negatively infinite limit)** ถ้าสำหรับแต่ละ $M>0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $a_n<-M$ สำหรับทุก $n\geq N$ และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

บทนิยาม 2.31 : ให้ I เป็นช่วงเปิด และ $a\in I$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าที่ทุกจุดใน I และอาจยกเว้นที่จุด a เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ a (limit of f at a)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)-L|<\varepsilon$ ถ้า $0<|x-a|<\delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.32 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง (a,b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา (limit of f as x approaches a from the right)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $0 < x - a < \delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim_{x \to a^+} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.33 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง (a,b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ b ทางซ้าย (limit of f as x approaches b from the left)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $-\delta < x - b < 0$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim_{x \to b^-} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.34 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง $(a,+\infty)$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ $+\infty$ (limit of f at $+\infty$)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง M ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x > M$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.35 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง $(-\infty,b)$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ $-\infty$ (limit of f at $-\infty$)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง M ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x < M$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

ทฤษฎีบท 2.36 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามค่าบน $[b,\infty)$ ซึ่ง $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ เมื่อ $n \geq b$ ถ้า $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

บทนิยาม 2.37 : ให้ $D \subset R$ และ $f : D \to R$ เราจะกล่าวว่า f **ต่อเนื่องที่** a **(continuous at** a**)** เมื่อ $a \in D$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ข้อสังเกต 2.38 : ให้ $D \subset R$ และ $f : D \to R$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ a เมื่อ $a \in D$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$

ทฤษฎีบท 2.39 : ให้ f เป็นฟังก์ชันแล้ว $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x - a| < \delta$ และ $0 < |x' - a| < \delta$

หมายเหตุ : ทฤษฎีบท 2.39 เป็นจริงสำหรับ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ หรือ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ หรือ $\lim_{x\to\infty} f(x)$

บทนิยาม 2.40 : ฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วงเปิด** (a,b) **(continuous on** (a,b)**)** ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a,b)

บทนิยาม 2.41 : ฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วงปิด** $[a,b]$ **(continuous on** $[a,b]$**)** ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b)

(2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

บทนิยาม 2.42 : ให้ $D \subset R$ และ $f : D \to R$ เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์ม (uniformly continuous)** บน D ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ เมื่อ $x_1, x_2 \in D$ และ $0 < |x_1 - x_2| < \delta$

บทนิยาม 2.43 : ให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆ และ $a \in I$ เรากล่าวว่า $f : I \to R$ **หาอนุพันธ์ได้ที่** a **(differentiable at** a **)** ถ้า $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ หาค่าได้

ค่าลิมิตตามบทนิยามข้างบนเรียกว่า**อนุพันธ์ของ** f **ที่** a **(derivative of** f **at** a**)** และเขียนแทนโดย $f'(a)$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน I จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)** บน I

ทฤษฎีบท 2.44 : ให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆ และ $a \in I$ ถ้า $f : I \to R$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้ว f ต่อเนื่องที่ a

บทนิยาม 2.45 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ เรากล่าวว่า f/g อยู่ใน**รูปแบบไม่กำหนด 0/0 (indeterminate form 0/0)**

บทนิยาม 2.46 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ เรากล่าวว่า f/g อยู่ใน**รูปแบบไม่กำหนด** ∞/∞ **(indeterminate form** ∞/∞**)**

ทฤษฎีบท 2.47 : กฎของโลปิตาล (L' Hopital ' s Rule)

สมมติ f และ g หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (a,b)$ ถ้ามี $x_0 \in (a,b)$ ซึ่ง $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ และ $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ แล้ว $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ข้อสังเกต 2.48 : (1) กฎของโลปิตาลยังใช้ได้กับเมื่อ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

(2) กฎของโลปิตาลสามารถขยายไปถึงกรณีที่ $x \to \pm\infty$ และ $x \to a^+$ และ $x \to b^-$

บทนิยาม 2.49 : ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a<b$ ถ้า $n\in I^+$ และ

$$a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$$

แล้วจะเรียก $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ ว่า**พาร์ทิชัน (partition)** ของช่วง $[a,b]$

บทนิยาม 2.50 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และ $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันของช่วง $[a,b]$ ให้ $m_i=inf\{f(x)|x_{i-1}\le x\le x_i\}$ และ $M_i=sup\{f(x)|x_{i-1}\le x\le x_i\}$ เราเรียก $L(P,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$ **ว่าผลบวกล่างของ** f **เทียบกับพาร์ทิชัน** P **(lower sum of** f **relative to partition** P**)** และเรียก $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$ **ว่าผลบวกบนของ** f **เทียบกับพาร์ทิชัน** P **(upper sum of** f **relative to partition** P**)**

บทนิยาม 2.51 : ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a,b]$ ถ้า $\sup_P\{L(P,f)\}=\inf_P\{U(P,f)\}$ เราเรียกค่าที่ได้นี้ว่า **อินทิกรัลของ** f **(integral of** f**)** บน $[a,b]$ และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f$ หรือ $\int_a^b f(x)dx$ และกล่าวว่า f **อินทิเกรตได้ (integrable)** บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.52 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,x]$ เมื่อ $x\in[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.53 : ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.54 : ถ้า f มีขอบเขตและต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วงปิด $[a,b]$ และอาจยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.55 : กำหนดให้ f อินทิเกรตได้ แล้ว $|f|$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

ทฤษฎีบท 2.56 : The First Fundamental Theorem of Calculus

ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และมีฟังก์ชัน g ซึ่ง $g' = f$ บนช่วง $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b f = g(b) - g(a)$

ทฤษฎีบท 2.57 : The Second Fundamental Theorem of Calculus

ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และกำหนด F บนช่วง $[a,b]$ โดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

แล้วสำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ $F'(x) = f(x)$

ทฤษฎีบท 2.58 : The Integrability Criterion

กำหนดให้ $f:[a,b] \to R$ มีขอบเขต แล้ว $f:[a,b] \to R$ อินทิเกรตได้ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีพาร์ทิชัน P บนช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

บทที่ 3
ลำดับของฟังก์ชัน
(SEQUENCES OF FUNCTIONS)

เราได้ศึกษาลำดับของจำนวนจริงและการลู่เข้ามาแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงลำดับของฟังก์ชันของตัวแปรเดียวซึ่งจะเกี่ยวข้องกับลำดับของจำนวนจริง การลู่เข้าของลำดับของฟังก์ชันมี 2 ประเภท คือ การลู่เข้าแบบทีละจุด และการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม การลู่เข้า 2 ประเภทนี้มีความแตกต่างกัน กล่าวคือ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน D แล้ว f อาจจะขาดคุณสมบัติบางประการ เช่น ความต่อเนื่อง การอินทิเกรตได้ และการมีอนุพันธ์ ในขณะที่แต่ละ f_n มีคุณสมบัติเหล่านั้น แต่ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D แล้ว f จะมีคุณสมบัติดังที่กล่าวมา ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดต่อไป

3.1 การลู่เข้าแบบทีละจุด (Pointwise Convergence)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการลู่เข้าแบบทีละจุดของลำดับของฟังก์ชันและตัวอย่างที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 3.1.1 : ให้ $\phi \neq D \subset R$ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ ให้ $f_n : D \to R$ เราจะเรียกลำดับ $\{f_n\}$ ว่า **ลำดับของฟังก์ชัน (sequences of functions)** บน D

บทนิยาม 3.1.2 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน D และ $f : D \to R$ เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ **ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน D (converges pointwise to f on D)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in D$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ และเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ลิมิตทีละจุด (pointwise limit)** ของลำดับ $\{f_n\}$

นอกจากนี้เรากล่าวว่า $\{f_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้าแบบทีละจุด (pointwise convergent sequence)**

ต่อไปนี้ถ้า $f : D \to R$ และ $f(x) = c$ สำหรับทุก $x \in D$ จะขอเขียนแทน f โดย $f \equiv c$ บน D

ในกรณีที่ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน D และ $f \equiv c$ บน D จะกล่าวว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ c บน D

ตัวอย่าง 3.1.3 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n}$ เมื่อ $x \in [0,\infty)$ จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 1 บนช่วง $[0,\infty)$

พิสูจน์ : ให้ $x \in [0,\infty)$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(x/n\right)+1} = 1$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 1 บนช่วง $[0,\infty)$ ●

ตัวอย่าง 3.1.4 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ เมื่อ $x \in R$ จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0

พิสูจน์ : ให้ $f \equiv 0$ บน R

เมื่อ $a = 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = 0 = f(a)$$

เมื่อ $a \neq 0$

ให้ $a_n = nae^{-na^2}$ และ $f(x) = xae^{-xa^2}$ โดยทฤษฎีบท 2.47 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xae^{-xa^2} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 2.36 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน R ●

ตัวอย่าง 3.1.5 : สำหรับแต่ละ $n \in I^{+}$ กำหนด $f_n(x) = x^n$ เมื่อ $0 \le x \le 1$ จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{ถ้า } x = 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ : เมื่อ $x = 1$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1 = f(1)$

เมื่อ $0 \le x < 1$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง $[0,1]$ ●

ตัวอย่าง 3.1.6 : สำหรับแต่ละ $n \in I^{+}$ กำหนด $f_n(x) = e^{-nx}$ เมื่อ $x \in [0,\infty)$ จงแสดงว่า ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 1 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

พิสูจน์ : เมื่อ $x = 0$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1 = f(0)$

เมื่อ $x \neq 0$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}}$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}}$ เนื่องจาก $e^b > 1+b$ สำหรับทุก $b > 0$ ดังนั้น $\frac{1}{e^b} < \frac{1}{1+b}$

สำหรับ $n \in I^{+}$ และ $x \neq 0$ จะได้ $0 < \frac{1}{e^{nx}} < \frac{1}{1+nx}$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ และ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}} = 0 = f(x)$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$ ●

ตัวอย่าง 3.1.7 : สำหรับแต่ละ $n \in I^{+}$ และเมื่อ $x \in [0,1]$ กำหนด

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = k2^{-n} \text{ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก } k \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงแสดงว่า ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f เมื่อ

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ ถ้า } x=k2^{-n} \text{ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก } k \text{ และ } n \\ 0 \text{ ถ้า } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

พิสูจน์ : ให้ $x\in[0,1]$ จะแยกพิจารณา x เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 : ถ้ามี $k_0,n_0\in I^+$ ซึ่ง $x=\dfrac{k_0}{2^{n_0}}$

จะแสดงว่า $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าสู่ 1 ให้ $\varepsilon>0$ เลือก $N=n_0$ สำหรับทุก $n\geq N$ จะได้ว่า

$$|f_n(x)-1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$$

ดังนั้น $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าสู่ 1

กรณีที่ 2 : ถ้า x ไม่สอดคล้องกรณีที่ 1

จะแสดงว่า $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ให้ $\varepsilon>0$ สำหรับทุก $n\in I^+$ จะได้ว่า

$$|f_n(x)-0| = |0-0| = 0 < \varepsilon$$

ดังนั้น $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าสู่ 0

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จึงสรุปได้ว่า ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f ●

ในตัวอย่าง 3.1.3 - 3.1.4 จะเห็นได้ว่า แต่ละ f_n และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ตัวอย่าง 3.1.5 แต่ละ f_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ตัวอย่าง 3.1.6 จะเห็นว่าแต่ละ f_n หาอนุพันธ์ได้บน $[0,\infty)$ แต่ f หาอนุพันธ์ไม่ได้บน $[0,\infty)$ และตัวอย่าง 3.1.7 จะเห็นว่าแต่ละ f_n อินทิเกรตได้ ในขณะที่ f อินทิเกรตไม่ได้ จาก [2]

ดังนั้นถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f แล้ว f อาจจะขาดคุณสมบัติบางประการ เช่น ความต่อเนื่อง การอินทิเกรตได้ และการมีอนุพันธ์ ในขณะที่แต่ละ f_n มีคุณสมบัติเหล่านั้น

3.2 การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Convergence)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้แสดงว่าคุณสมบัติของการลู่เข้าแบบทีละจุดของลำดับของฟังก์ชันไม่เพียงพอที่ลิมิตฟังก์ชันจะมีคุณสมบัติของความต่อเนื่อง การอินทิเกรตได้ และการมีอนุพันธ์ เมื่อแต่ละ f_n ของลำดับ $\{f_n\}$ มีคุณสมบัติดังกล่าว ในหัวข้อนี้จะแสดงว่าการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มจะทำให้ลิมิตฟังก์ชันมีคุณสมบัติทั้งหมดที่กล่าวมา เมื่อแต่ละ f_n ของลำดับ $\{f_n\}$ มีคุณสมบัติดังกล่าว

บทนิยาม 3.2.1 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน D และ $f : D \to R$ เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่** f **บน** D **(converges uniformly to** f **on** D**)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in D$ และทุก $n \geq N$

เราเรียกฟังก์ชัน f ว่า**ลิมิตยูนิฟอร์ม (uniform limit)** ของลำดับ $\{f_n\}$

นอกจากนี้ เรากล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (uniformly convergent sequence)**

จากบทนิยามของการลู่เข้าแบบทีละจุด และการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม จะเห็นได้ชัดว่า ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f แล้วลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f แต่บทกลับนี้ไม่จริงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.2 : กำหนดลำดับ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ สำหรับทุก $x \in [-1,1]$ เมื่อ $n \in I^+$ จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 แต่ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0

พิสูจน์ : ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0

เมื่อ $x = 0$ จะได้ว่า
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

เมื่อ $x \neq 0$ จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx/n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)/n^2x^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/nx}{\left(1/n^2x^2\right)+1} = 0\end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บนช่วง $[-1,1]$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง $[-1,1]$

สมมติลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f ดังนั้นเมื่อให้ $\varepsilon = \frac{1}{4}$ แล้วจะมี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \in [-1,1]$ และเมื่อ $n \geq N$ พิจารณา $x = \dfrac{1}{N}$ แล้ว $x \in [-1,1]$ และ

$$\left| f_N(x) - f(x) \right| = \left| \frac{N\left(1/N\right)}{1+N^2\left(1/N\right)^2} - 0 \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon \quad \text{ซึ่งขัดแย้งกับ} \quad (*)$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[-1,1]$ ●

ตัวอย่าง 3.2.3 : จากตัวอย่าง 3.1.3 จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$ แต่ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f สำหรับทุก $x \in [0,k]$ เมื่อ $k > 0$

พิสูจน์ : ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$ สมมติลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f ดังนั้นเมื่อให้ $\varepsilon = \frac{1}{3}$ แล้วจะมี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \geq 0$ และเมื่อ $n \geq N$ พิจารณา $x = N$ แล้ว $x \geq 0$ และ

$$\left| f_N(x) - f(x) \right| = \left| \frac{N}{N+N} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon \quad \text{ซึ่งขัดแย้งกับ } (*)$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f สำหรับทุก $x \in [0,k]$ เมื่อ $k > 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \frac{k}{\varepsilon}$ สำหรับทุก $x \in [0,k]$ และเมื่อ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{n}{x+n} - 1 \right| \leq \frac{k}{x+N} < \frac{k}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f เมื่อ $x \in [0,k]$ เมื่อ $k > 0$ ●

ตัวอย่าง 3.2.4 : จากตัวอย่าง 3.1.4 จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน R

พิสูจน์ : สมมติลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f ดังนั้นเมื่อให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ แล้วจะมี $N_1 \in I^+$ ซึ่ง

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \in R$ และเมื่อ $n \geq N_1$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N_2 > e^2$

ให้ $N = max\{N_1, N_2\}$

พิจารณา $x=\frac{1}{\sqrt{N}}$ แล้ว $x\in R$ และ

$$\left|f_N(x)-f(x)\right| = \left|N\left(\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-N\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2}-0\right)\right| = \left|\frac{\sqrt{N}}{e}\right| > \left|\frac{\sqrt{e^2}}{e}\right| = 1 > \varepsilon$$ ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน R ●

ตัวอย่าง 3.2.5 : จากตัวอย่าง 3.1.5 จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,1]$ แต่ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,k]$ เมื่อ $0<k<1$

พิสูจน์ : ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,1]$ สมมติลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f ดังนั้นเมื่อให้ $\varepsilon=\frac{1}{2}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x\in[0,1]$ และเมื่อ $n\geq N$ พิจารณา $x=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{N}}$ แล้ว $x\in[0,1]$ และ

$$\left|f_N(x)-f(x)\right| = \left|\frac{3}{4}-0\right| = \frac{3}{4} > \varepsilon$$ ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,1]$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,k]$ เมื่อ $0<k<1$ ให้ $\varepsilon>0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N>log_k\varepsilon$ สำหรับทุก $x\in[0,k]$ และทุก $n\geq N$ จะได้ว่า

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| = \left|x^n-0\right| \leq x^N \leq k^N < k^{log_k\varepsilon} = \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,k]$ เมื่อ $0<k<1$ ●

ตัวอย่าง 3.2.6 : จากตัวอย่าง 3.1.6 จงแสดงว่า ลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$ แต่ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[k,\infty)$ เมื่อ $k>0$

พิสูจน์ : จะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$ สมมติลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f ดังนั้นเมื่อให้ $\varepsilon=\frac{1}{3}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \geq 0$ และเมื่อ $n \geq N$ พิจารณา $x = \frac{1}{N}$ แล้ว $x \geq 0$ และ

$$\left| f_N(x) - f(x) \right| = \left| e^{-N\left(\frac{1}{N}\right)} - 0 \right| = \frac{1}{e} > \varepsilon \quad \text{ซึ่งขัดแย้งกับ (*)}$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[k,\infty)$ โดยที่ $k > 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > -\frac{1}{k} ln\varepsilon$ สำหรับทุก $x \in [k,\infty)$ และเมื่อ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| e^{-nx} - 0 \right| \leq e^{-Nx} < e^{-Nk} < e^{-k\left(-\frac{1}{k} ln\varepsilon\right)} = \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[k,\infty)$ เมื่อ $k > 0$ ●

3.3 ผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (Consequences of Uniform Convergence)

ในหัวข้อนี้จะแสดงว่าการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของลำดับของฟังก์ชันรักษาคุณสมบัติของความต่อเนื่อง การหาอนุพันธ์ และการอินทิเกรตได้ ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดต่อไป

ทฤษฎีบท 3.3.1 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องบน D และ $f : D \to R$ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจากลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f จะได้ว่ามี $N \in I^+$ ซึ่ง $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ สำหรับทุก $n \geq N$ และทุก $x \in D$

ให้ $x_0 \in D$ เนื่องจาก $f_N : D \to R$ ต่อเนื่องที่ x_0 จะได้ว่า

มี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับทุก $x \in D$ ถ้า $\left| x - x_0 \right| < \delta$ แล้ว $\left| f_N(x) - f_N(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - f(x_0) \right| &= \left| f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0) \right| \\
&\leq \left| f(x) - f_N(x) \right| + \left| f_N(x) - f_N(x_0) \right| + \left| f_N(x_0) - f(x_0) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f : D \to R$ ต่อเนื่องที่ x_0 ■

ตัวอย่าง 3.3.2 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = 1-\left|1-x^2\right|^n$ สำหรับทุก $x \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

พิสูจน์ : ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \quad \text{และ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = \pm\sqrt{2} \quad \text{และ } x = 0 \end{cases}$$

เนื่องจาก $x \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ จะได้ว่า $\left|1-x^2\right| \leq 1$

ถ้า $\left|1-x^2\right| < 1$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1-\left|1-x^2\right|^n = 1$$

ถ้า $\left|1-x^2\right| = 1$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1-\left|1-x^2\right|^n = 0$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และแต่ละ f_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D ดังนั้นสรุปได้ว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ ●

ข้อสังเกต 3.3.3 : บทกลับของทฤษฎีบท 3.3.1 ไม่จริง ดังจะเห็นได้จากตัวอย่าง 3.2.2 ซึ่งแต่ละ f_n ต่อเนื่องบนช่วง [-1,1] และลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 ซึ่ง 0 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-1,1] แต่ลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง [-1,1] ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.3.1 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.3.4 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $f : [a,b] \to R$ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n\right] = \int_a^b f$$

พิสูจน์ : ประการแรกจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$
ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจากลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f
ดังนั้นมี $N\in I^+$ ซึ่ง $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ สำหรับทุก $x\in[a,b]$ และทุก $n\geq N$ นั่นคือ

$$f_n(x)-\frac{\varepsilon}{3(b-a)} \;\leq\; f(x) \;\leq\; f_n(x)+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

แล้วสำหรับพาร์ทิชัน P ของ $[a,b]$ ซึ่งถ้า $n\geq N$ แล้วจะได้ว่า

$$L(P,f_n)-\frac{\varepsilon(b-a)}{3(b-a)} \leq L(P,f) \leq U(P,f)\leq U(P,f_n)+\frac{\varepsilon(b-a)}{3(b-a)}$$

นั่นคือ

$$L(P,f_n)-\frac{\varepsilon}{3} \;\leq\; L(P,f) \leq U(P,f) \leq\; U(P,f_n)+\frac{\varepsilon}{3} \qquad (*)$$

แต่ฟังก์ชัน $f_N:[a,b]\to R$ อินทิเกรตได้ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.58 เลือกพาร์ทิชัน P_* ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(P_*,f_N)-L(P_*,f_N) \;<\; \frac{\varepsilon}{3} \qquad (**)$$

จาก (*) และ (**) จะได้

$$U(P_*,f)-L(P_*,f) \;<\; \varepsilon$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n\right]=\int_a^b f$

ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจากลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f
จะได้ว่า มี $N\in I^+$ ซึ่ง $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ สำหรับทุก $x\in[a,b]$ และทุก $n\geq N$
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)dx\right| \\
&\leq \int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|dx \\
&< \int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx \;=\; \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n\right]=\int_a^b f$ ■

ตัวอย่าง 3.3.5 : สำหรับแต่ละ $n\in I^+$ กำหนด $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ บนช่วง [0,1]จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง [0,1]

พิสูจน์ : โดยตัวอย่าง 3.1.4 จะเห็นว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f โดยที่ $f(x)=0$ เมื่อ $x\in[0,1]$ เนื่องจาก $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.4 จะได้ว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง [0,1] ●

ข้อสังเกต 3.3.6 : บทกลับของทฤษฎีบท 3.3.4 ไม่จริง ดังจะเห็นได้จากตัวอย่าง 3.2.2 จะเห็นว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง [0,1] แล้ว $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx=0$

และ $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2n}ln\left(1+n^2x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2n}ln\left(1+n^2\right)$

ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0 = \int_0^1 f(x)dx$ แต่ลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง [0,1] ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จริง ●

ทฤษฎีบท 3.3.7 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง $[a,b]$ ถ้าสำหรับแต่ละ $n\in I^+$ ซึ่ง f_n' ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และลำดับ $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[a,b]$แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$

พิสูจน์ : ให้ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งลำดับ $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ g บน $[a,b]$ เนื่องจาก f_n' ต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยทฤษฎีบท 3.3.1 จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และโดยทฤษฎีบท 2.53 จะได้ว่า g อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ให้ $x\in[a,b]$

เนื่องจากลำดับ $\{f_n'\}$ อินทิเกรตได้บน $[a,x]$ และลำดับ $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ g บน $[a,x]$ โดยทฤษฎีบท 3.3.4 จะได้ว่า

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt$$

พิจารณา $\int_a^x f_n'(t)dt$ โดยทฤษฎีบท 2.56 จะได้ว่า

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x)-f_n(a)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(f_n(x)-f_n(a)\big)\\ &= f(x)-f(a)\end{aligned}$$

และทุก $x\in[a,b]$ จะได้

$$f(x) = f(a)+\int_a^x g(t)dt$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.57 จะได้ว่า $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ตัวอย่าง 3.3.8 : สำหรับแต่ละ $n\in I^+$ กำหนด $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ บนช่วง [0, 1] จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n'\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง [0,1]

พิสูจน์ : ให้ $x\in[0,1]$ เนื่องจากลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f โดยที่ $f(x)=0$ จะได้ว่า $f'(x)=0$ เนื่องจาก $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ จะได้ว่า $f_n'(x)=\dfrac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$

พิจารณา $x=0$ จะได้ $f'(0)=0$ และ $f_n'(0)=n$ สำหรับทุก $n\in I^+$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) =\infty$

จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)\neq f'(0)$ ดังนั้นลำดับ $\{f_n'\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม บน [0, 1] ●

บทที่ 4

อนุกรมของฟังก์ชัน

(SERIES OF FUNCTIONS)

ในบทที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึงลำดับของฟังก์ชันซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน ในบทนี้เราจะศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน และการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน เริ่มต้นจะกล่าวถึงอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่งเกี่ยวข้องกับอนุกรมของฟังก์ชัน

4.1 อนุกรมของจำนวนจริง (Series of Real Numbers)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่งเป็นพื้นฐานในการศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน โดยมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 4.1.1 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ เราจะเรียก $\{S_n\}$ ว่า**อนุกรมของจำนวนจริง (series of real numbers)** ซึ่งมี**เทอมที่** n **(n^{th} term)** คือ a_n และเขียนแทนอนุกรมโดย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ เราเรียก S_n ว่า**ผลบวกย่อยที่** n **(n^{th} partial sum)** ของอนุกรม

บทนิยาม 4.1.2 : เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้าสู่** S **(converges to** S **)** ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ S เราเรียก S ว่า**ผลบวก (sum)** ของอนุกรม และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

และกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้า (convergent series)** ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกจะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่ออก (divergent series)**

ตัวอย่าง 4.1.3 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$ เมื่อ $|x|<1$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ : ให้ $|x|<1$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} S_n &= a+ax+ax^2+\ldots+ax^{n-1}) \\ &= a(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) \\ &= a\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = a\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right) \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.6 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = a\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a}{1-x}$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|x|<1$ ●

นอกจากนี้ $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|x|\geq 1$ และเรียก $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$ ว่า**อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series)**

ตัวอย่าง 4.1.4 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและหาผลบวกของอนุกรมนี้

วิธีทำ : เนื่องจาก $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ จะได้

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$$

และ $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกของอนุกรมเป็น 1 ●

ทฤษฎีบท 4.1.5 : ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

พิสูจน์ : ให้ S เป็นผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ แล้วสำหรับทุก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

แต่ $a_n = S_n - S_{n-1}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$ ■

ตัวอย่าง 4.1.6 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.1.7 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนที่ไม่เป็นลบ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อมีจำนวนบวก M ซึ่ง $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq M$ สำหรับทุก $n \in I^+$

พิสูจน์ : เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนที่ไม่เป็นลบจะได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขต นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อมีจำนวนบวก M ซึ่ง $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq M$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ■

ตัวอย่าง 4.1.8 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

วิธีทำ : สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

เราจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขต ประการแรกจะแสดงว่า

$$S_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \in I^+$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $S_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$ สำหรับทุก $n \in I^+$

จะพิสูจน์ว่า $P(1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $S_{2^1} = S_2 = 1+\frac{1}{2} \geq 1+\frac{1}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า สำหรับแต่ละ $k \in I^+$ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $k \in I^+$ และ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $S_{2^k} \geq 1+\frac{k}{2}$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} S_{2^{k+1}} &= S_{2^k} + \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \\ &\geq S_{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \\ &= 1+\frac{k}{2}+\frac{2^k}{2^{k+1}} = 1+\frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $S_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ประการสุดท้ายแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขต

ให้ $M > 0$ เลือก $n \in I^+$ ซึ่ง $1+\frac{n}{2} > M$ ดังนั้น

$$\left| S_{2^n} \right| \geq 1+\frac{n}{2} > M$$

ทำให้ได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขต ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

เราจะเรียกอนุกรมในตัวอย่าง 4.1.8 ว่า **อนุกรมฮาร์โมนิก (Hamonic series)**

ทฤษฎีบท 4.1.9 : ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = A\sum_{n=1}^{\infty} a_n + B\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

พิสูจน์ : ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ และ $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

ให้ $Q_n = \sum_{k=1}^{n} (Aa_k + Bb_k)$ แล้วจะได้

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} Aa_k + \sum_{k=1}^{n} Bb_k = A\sum_{k=1}^{n} a_k + B\sum_{k=1}^{n} b_k = AS_n + BT_n$$

และ $\lim_{n\to\infty} Q_n = A\cdot \lim_{n\to\infty} S_n + B\cdot \lim_{n\to\infty} T_n$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าสู่ S และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าสู่ T

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ และ $\lim_{n\to\infty} T_n = T$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} Q_n = AS + BT = A\cdot \lim_{n\to\infty} S_n + B\cdot \lim_{n\to\infty} T_n$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = A\sum_{n=1}^{\infty} a_n + B\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ■

ทฤษฎีบท 4.1.10 : การทดสอบเปรียบเทียบ (The Comparison Test)

ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง $0 \le a_n \le b_n$ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

(1) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : (1) เนื่องจาก $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง $0 \le a_n \le b_n$ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.7 จะได้ว่ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่งทำให้

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \le M \quad \text{สำหรับทุก } n \in I^+$$

และ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le b_1 + b_2 + \ldots + b_n \le M$$

โดยทฤษฎีบท 4.1.7 สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สมมติ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นมีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $b_1+b_2+...+b_n \le M$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ดังนั้นโดย (1) จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ■

ตัวอย่าง 4.1.11 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจาก $0 \le \frac{1}{\sqrt{n}2^n} \le \frac{1}{2^n}$ สำหรับทุก $n \in I^+$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.10 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 4.1.12 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจาก $\frac{1}{2+\sqrt{n}} \ge \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n}$ ซึ่ง $0 \le \frac{1}{3n} \le \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาร์โมนิก ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.10 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปจะขอละการพิสูจน์ แต่จะมีตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบท ซึ่งผู้ที่สนใจสามารถอ่านบทพิสูจน์ได้จาก [4]

ทฤษฎีบท 4.1.13 : การทดสอบอินทิกรัล (The Integral Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งมีทุกเทอมเป็นจำนวนบวก และให้ฟังก์ชัน $f:[1,\infty)\to R$ เป็นฟังก์ชันลดลงซึ่งมีความต่อเนื่องและสอดคล้องกับ

$$f(k) = a_k \quad \text{สำหรับทุก } k \in I^+$$

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับ $\left\{\int_1^n f(x)dx\right\}$ มีขอบเขต

ตัวอย่าง 4.1.14 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \in [1,\infty)$ จะได้ว่า $f(x) > 0$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงซึ่งมีความต่อเนื่อง และ

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx = lnx\Big|_1^n = lnn$$

ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}dx = +\infty$ จึงได้ว่าลำดับ $\left\{\int_1^n \frac{1}{x^2}dx\right\}$ ไม่มีขอบเขต

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.13 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.1.15 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : ให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ เมื่อ $x \in [1,\infty)$ จะได้ว่า $f(x) > 0$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงซึ่งมีความต่อเนื่อง และ

$$\int_1^n \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^n = 1-\frac{1}{n}$$

ซึ่ง $\lim_{n\to\infty}\left[\int_1^n \frac{1}{x^2}dx\right] = 1$ จึงได้ว่าลำดับ $\left\{\int_1^n \frac{1}{x^2}dx\right\}$ มีขอบเขต

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.13 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 4.1.16 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : ให้ $f(x) = \frac{1}{(x+1)ln(x+1)}$ เมื่อ $x\in[1,\infty)$ จะได้ว่า $f(x)>0$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงซึ่งมีความต่อเนื่อง และ

$$\int_1^n \frac{1}{(x+1)ln(x+1)}dx = ln\left(ln(x+1)\right)\Big|_1^n = ln\left(ln(n+1)\right)-ln\left(ln2\right)$$

ซึ่ง $\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{(x+1)ln(x+1)}dx=+\infty$ จึงได้ว่าลำดับ $\left\{\int_1^n \frac{1}{(x+1)ln(x+1)}dx\right\}$ ไม่มีขอบเขต

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.13 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.1.17 : การทดสอบพี (The p –Test)

สำหรับจำนวนเต็มบวก p จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $p>1$

ตัวอย่าง 4.1.18 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจาก $0\le\frac{1}{n^2+1}\le\frac{1}{n^2}$ สำหรับทุก $n\in I^+$

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี มีค่า $p=2>1$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.13 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 4.1.19 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของอนุกรม (The Cauchy Convergence Criterion for Series)

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+k}\right|<\varepsilon$ สำหรับทุก $n\ge N$ และทุก $k\in I^+$

4.2 การลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน (Convergence of Series of Functions)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน ซึ่งจะแบ่งเป็น 2 ประเภท เช่นเดียวกับการลู่เข้าของลำดับของฟังก์ชัน โดยจะกล่าวรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 4.2.1 : ให้ $\phi \neq D \subset R$ และ $f_n : D \to R$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $S_n : D \to R$ นิยามบน D ดังนี้

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in D$$

เรากล่าวว่า $\{S_n\}$ เป็น**อนุกรมของฟังก์ชัน (series of functions)** บน D ซึ่งมีเทอมที่ k คือ f_k และเขียนแทนอนุกรมด้วย $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ หรือ $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ เราเรียก S_n ว่า**ผลบวกย่อยที่ n (n^{th} partial sum)** ของอนุกรม

เมื่อกำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่นแล้ว $\{S_n\}$ แทนลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม

บทนิยาม 4.2.2 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน D และ $S : D \to R$ เรากล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บน D (converges pointwise to S on D)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in D$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ หรือ $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$ และเรียก S ว่า**ลิมิตทีละจุด (pointwise limit)** ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

นอกจากนี้เรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้าแบบทีละจุด (pointwise convergent series)**

บทนิยาม 4.2.3 : กำหนดให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน D เรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่** S **บน** D **(converges uniformly to** S **on** D **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in D$ และทุก $n \geq N$

นอกจากนี้ เรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (uniform convergent series)**

ข้อสังเกต 4.2.4 : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม ก็ต่อเมื่อ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

ข้อสังเกต 4.2.5 : เราอาจใช้สัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ แทน $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เพื่อแสดงถึงค่าของ f_n ที่จุด x

ตัวอย่าง 4.2.6 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = x^{n-1}$ สำหรับทุก $x \in (-1,1)$ จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง (-1,1) แต่ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง (-1,1)

วิธีทำ : ประการแรกจะแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง (-1,1)

ให้ $x \in (-1,1)$ และ $S(x) = \frac{1}{1-x}$ เนื่องจาก

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}$$

ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง (-1,1)

ต่อไปจะแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง (-1,1)

สมมติอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง (-1,1)

ให้ $\varepsilon > 0$ มี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \in (-1,1)$ และทุก $n \geq N$ เลือก $x \in (\frac{1}{2},1)$ ซึ่ง $1-x < min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^N \varepsilon}\right\}$

จะได้ว่า $1-x < \frac{1}{2}$ นั่นคือ $x > \frac{1}{2}$ ทำให้ได้ว่า

$$x^N > \frac{1}{2^N} \qquad (**)$$

เนื่องจาก $1-x < \frac{1}{2^N \varepsilon}$ ดังนั้น

$$\frac{1}{1-x} > 2^N \varepsilon \qquad (***)$$

จาก (**) และ (***) จะได้ว่า $\frac{x^N}{|1-x|} > \varepsilon$ ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง (-1,1) ●

ตัวอย่าง 4.2.7 : ในตัวอย่าง 4.2.6 ได้แสดงแล้วว่า $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง (-1,1) จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[-r,r]$ เมื่อ $0<r<1$

วิธีทำ : ให้ $\varepsilon > 0$ และ $0<r<1$

เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > ln_r(\varepsilon(1-r))$ สำหรับทุก $x \in [-r,r]$ และเมื่อ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^n}{|1-x|} \leq \frac{r^n}{1-r} \leq \frac{r^N}{1-r} < \frac{r^{ln_r \varepsilon(1-r)}}{1-r} = \varepsilon$$

ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[-r,r]$ เมื่อ $0<r<1$ ●

ตัวอย่าง 4.2.8 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}$ สำหรับทุก $x \in [0,1]$ จงแสดงว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บนช่วง [0,1] แต่ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง [0,1]

วิธีทำ : ให้ $S(x) = 0$ เมื่อ $x \in [0,1]$
เนื่องจาก $f_n(x) = nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}$ เมื่อ $x \in [0,1]$
จะได้ว่า $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$ และ
จากตัวอย่าง 3.1.4 และ 3.2.4 เราได้แสดงแล้วว่า $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บนช่วง [0,1] แต่ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง [0,1] ●

ในบทที่ 3 เราได้แสดงผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มดังกล่าวในทฤษฎีบท 3.3.1 , 3.3.4 และ 3.3.7 สำหรับอนุกรมของฟังก์ชันซึ่งเป็นลำดับของฟังก์ชันเช่นกัน เราจึงได้ผลในลักษณะเดียวกันโดยจะกล่าวในทฤษฎีบท 4.2.9 , 4.2.10 และ 4.2.13 ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.9 : กำหนดให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบน D ถ้าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บน D แล้ว S เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D

ทฤษฎีบท 4.2.10 : กำหนดให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[a,b]$ แล้ว S อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx \text{ นั่นคือ } \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$$

ตัวอย่าง 4.2.11 : ในตัวอย่าง 4.2.7 ได้แสดงแล้วว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[-r,r]$ เมื่อ $0 < r < 1$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2.10 จะได้ว่า

$$\int_{-r}^{r}\frac{1}{1-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-r}^{r}x^{n-1}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2r^{2n-1}}{2n-1}$$

แต่ $$\int_{-r}^{r}\frac{1}{1-x}dx = ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

ดังนั้น $$ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 2\left(r+\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{5}+\ldots\right)$$

หรือ

$$ln\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} = r+\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{5}+\ldots$$

●

เงื่อนไขของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มในทฤษฎีบท 4.2.10 มีความสำคัญมาก ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.12 : จากตัวอย่าง 4.2.8 ได้แสดงแล้วว่า $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$ สำหรับทุก $x\in[0,1]$

พิจารณา $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{b}f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_{0}^{1}f_m(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}S_n(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}nxe^{-nx^2}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right) = \frac{1}{2}$$

แต่ $$\int_{a}^{b}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx = 0$$

ดังนั้น $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{b}f_n(x)dx \neq \int_{a}^{b}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx$$

●

ทฤษฎีบท 4.2.13 : กำหนดให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง $[a,b]$ และให้แต่ละ f_n' ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[a,b]$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$

4.3 การทดสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (Tests for Uniform Convergence)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการทดสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของลำดับของฟังก์ชัน กล่าวคือ เราจะกล่าวถึงการทดสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มชนิดต่าง ๆ เช่น เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม และการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์สำหรับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม โดยจะกล่าวรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 4.3.1 : กำหนดให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง D นิยามลำดับของจำนวนจริง $\{M_n\}$ ดังนี้

$$M_n = \sup_D |S_n - S|$$

แล้วได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน D ก็ต่อเมื่อลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจากลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน D ดังนั้นมี $N \in I^+$ ซึ่ง $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $x \in D$ และเมื่อ $n \geq N$ จะได้ว่า $M_n = \sup_D |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

ดังนั้นลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

$(\leftarrow)$ ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจากลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ดังนั้นมี $N \in I^+$ ซึ่ง $0 \leq M_n < \varepsilon$ เมื่อ $n \geq N$ และสำหรับทุก $x \in D$ และทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \sup_D |S_n(x) - S(x)| = M_n < \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน D ■

ตัวอย่าง 4.3.2 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $S_n(x) = \dfrac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$ เมื่อ $x \in [0,\pi]$ จงแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง $[0,\pi]$

วิธีทำ : เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$

จะได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บนช่วง $[0,\pi]$

เนื่องจาก $\left|S_n(x)-S(x)\right| = \left|\dfrac{sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

สำหรับ $n \in I^+$ เมื่อเลือก $x = \dfrac{\pi}{2n}$ แล้ว $x \in [0,\pi]$ และ

$$M_n = \left|\frac{sin\left[n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ดังนั้นลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.1 จะได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง $[0,\pi]$ ●

ตัวอย่าง 4.3.3 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $S_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ เมื่อ $x \in [0,1]$ จงแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,1]$

พิสูจน์ : ให้ $S(x) = x$ สำหรับทุก $x \in [0,1]$

ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง $[0,1]$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx^2}{1+nx} = x$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง $[0,1]$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,1]$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \left|S_n(x)-S(x)\right| &= \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{nx}{nx+1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{nx+1}\right) \le \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ดังนั้น $0 \leq M_n \leq \frac{1}{n}$ โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่าลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0
ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.1 จะได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,1]$ ●

ตัวอย่าง 4.3.4 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $S_n(x) = x^n$ เมื่อ $x \in [0,1)$ จงแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง [0,1)

วิธีทำ : เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$
จะได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บนช่วง [0,1)
เนื่องจาก $|S_n(x) - S(x)| = |x^n - 0| < 1$
เห็นได้ว่า $M_n = 1$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ดังนั้นลำดับ $\{M_n\}$ ไม่ลู่เข้าสู่ 0
เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.1 จะได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บนช่วง [0,1) ●

ทฤษฎีบท 4.3.5 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (The Cauchy Criterion for Uniform Convergence)

ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน D แล้วลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน D ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

เมื่อ $n \geq N, k \in I^+$ และ $x \in D$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมีฟังก์ชัน S ซึ่ง ลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บน D แล้วจะได้ว่า มี $N \in I^+$ ซึ่ง $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $x \in D$ และทุก $n \geq N$
ถ้า $n \geq N, k \in I^+$ และ $x \in D$ แล้ว

$$\begin{aligned} |S_{n+k}(x) - S_n(x)| &= |S_{n+k}(x) - S(x) + S(x) - S_n(x)| \\ &\leq |S_{n+k}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$(\leftarrow)$ ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมี $N \in I^+$ ซึ่ง $|S_{n+k}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
สำหรับทุก $n \geq N, k \in I^+$ และ $x \in D$ จะได้ว่า

$$S_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq S_{n+k}(x) \leq S_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

แต่ $\lim_{k\to\infty} S_{n+k}(x) = S(x)$ จะได้ว่า

$$S_n(x)-\frac{\varepsilon}{2} \le S(x) \le S_n(x)+\frac{\varepsilon}{2}$$

นั่นคือ $|S_n(x)-S(x)| < \varepsilon$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน D ■

ตัวอย่าง 4.3.6 : สำหรับแต่ละ $n\in I^+$ กำหนดให้ $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n}$ บน R จงแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R

วิธีทำ : ให้ $\varepsilon>0$ ดังนั้นเลือก $N\in I^+$ ซึ่ง $N\ge\dfrac{2}{\varepsilon}$ ดังนั้นสำหรับ $m\ge n>N$ และ $x\in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)| &= \left|\frac{\sin(nx)}{n}-\frac{\sin(mx)}{m}\right| \\ &\le \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right|+\left|\frac{\sin(mx)}{m}\right| \\ &\le \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \le \frac{2}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R ●

ทฤษฎีบท 4.3.7 : การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass M – test)

ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบนช่วง D และมีลำดับของจำนวนจริงบวก $\{M_n\}$ ซึ่ง $|f_n(x)|\le M_n$ สำหรับทุก $x\in D$ และทุก $n\in I^+$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน D

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 4.1.19 จะได้ว่ามี $N\in I^+$ ซึ่ง $\sum_{k=n+1}^{m}M_k<\varepsilon$ สำหรับทุก $m>n\ge N$

ดังนั้นสำหรับทุก $x\in D$ จะได้ว่า

$$\left|S_m(x)-S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m}\left|f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.5 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน D ■

ตัวอย่าง 4.3.8 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(nx)$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $(-\infty,\infty)$

วิธีทำ : เนื่องจาก $|\sin(nx)| \le 1$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{n^2}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี ที่มีค่า $p = 2 > 1$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.7 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(nx)$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $(-\infty,\infty)$ ●

4.4 ตัวอย่างที่น่าสนใจ

ในหัวข้อนี้เป็นการรวบรวมโจทย์ที่น่าสนใจเกี่ยวกับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของลำดับและอนุกรมของฟังก์ชัน โดยใช้การตรวจสอบด้วยวิธีต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ซึ่งโจทย์เหล่านี้รวบรวมมาจากหนังสือหลายเล่มที่ยังไม่ได้เฉลยคำตอบ ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4.1 : จงแสดงว่าอนุกรม

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{x}{(2x+1)(3x+1)}+\dots$$

เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[0,\infty)$ แต่เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง (k,∞) เมื่อ $k>0$

วิธีทำ : สำหรับ $n\in I^+$ และ $x\in[0,\infty)$ ให้

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{x}{x+1}+\frac{x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{x}{(2x+1)(3x+1)}+\dots+\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} \\
&= \frac{x}{x+1}+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)+\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3x+1}\right)+\dots+\left(\frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1}\right) \\
&= 1-\frac{1}{nx+1} = \frac{nx}{nx+1}
\end{aligned}$$

ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 1 บนช่วง $[0,\infty)$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{nx+1} = 1$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 1 บนช่วง $[0,\infty)$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 1 บนช่วง $[0,\infty)$

สมมติลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 1 บนช่วง $[0,\infty)$

ดังนั้นให้ $\varepsilon = \frac{1}{3}$ จะมี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \in [0,\infty)$ และทุก $n \geq N$ พิจารณา $x = \dfrac{1}{N}$ แล้ว $x \in [0,\infty)$ และ

$$\left|S_N(x) - S(x)\right| = \left|\frac{N\left(1/N\right)}{N\left(1/N\right)} - 1\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon$$ ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 1 บนช่วง $[0,\infty)$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 1 บนช่วง (k,∞) เมื่อ $k > 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \dfrac{1}{k\varepsilon}$ สำหรับทุก $x \in (k,\infty)$ และทุก $n \geq N$

จะได้ว่า

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| = \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} \leq \frac{1}{Nk} < \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 1 บนช่วง (k,∞) เมื่อ $k > 0$ ●

ตัวอย่าง 4.4.2 : จงแสดงว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[0,\infty)$ แต่เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[0,k)$ เมื่อ $k > 0$

วิธีทำ : สำหรับ $n \in I^+$ และ $x \in [0,\infty)$ ให้

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x}{3\cdot 4} + \dots + \frac{x}{(n-1)\cdot n} \\ &= x\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right) \\ &= x\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= x\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{nx}{n+1} \end{aligned}$$

ให้ $S(x) = x$ สำหรับทุก $x \in [0,\infty)$

ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง $[0,\infty)$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+1} = x$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ S บนช่วง $[0,\infty)$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,\infty)$

สมมติลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,\infty)$

ดังนั้นให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ จะมี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \in [0,\infty)$ และทุก $n \geq N$ พิจารณา $x = N+1$ แล้ว $x \in [0,\infty)$ และ

$$\left|S_N(x) - S(x)\right| = \left|\frac{N(N+1)}{N+1} - (N+1)\right| = 1 > \varepsilon \text{ ซึ่งขัดแย้งกับ } (*)$$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,\infty)$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,k)$ เมื่อ $k > 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \frac{k}{\varepsilon}$ สำหรับทุก $x \in (0,k)$ และทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| = \left|\frac{nx}{n+1} - x\right| < \left|-\frac{x}{n+1}\right| \leq \frac{x}{N} \leq \frac{k}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บนช่วง $[0,k)$ เมื่อ $k > 0$ ●

ตัวอย่าง 4.4.3 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R

วิธีทำ : เมื่อ $x \in R$ จะได้ว่า $1 + nx^2 \geq 1$ ดังนั้น $\frac{1}{1+nx^2} \leq 1$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และทุก $x \in R$ เนื่องจาก

$$\left|\frac{1}{n^3 + n^4 x^2}\right| = \left|\frac{1}{n^3(1+nx^2)}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ เป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p = 3 > 1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.7 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R ●

ตัวอย่าง 4.4.4 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[1+k,\infty)$ เมื่อ $k>0$

วิธีทำ : ให้ $x\in[1+k,\infty)$ เมื่อ $k>0$ เนื่องจาก $\left|\frac{1}{n^x}\right| \le \frac{1}{n^{1+k}}$
และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+k}}$ เป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p=1+k>1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
ดังนั้นโดยทฤษฎีบท4.3.7 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[1+k,\infty)$ เมื่อ $k>0$

ตัวอย่าง 4.4.5 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[k,1]$ เมื่อ $k>0$

วิธีทำ : ให้ $x\in[k,1]$ เมื่อ $k>0$ เนื่องจาก $\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| \le \frac{1}{n^2k^2}$

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2k^2} = \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p=2>1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
ดังนั้นโดยทฤษฎีบท4.3.7 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[k,1]$เมื่อ $k>0$

ตัวอย่าง 4.4.6 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}a_n sin(nx)$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(nx)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $(-\infty,\infty)$

วิธีทำ : ประการแรกจะแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}a_n sin(nx)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $(-\infty,\infty)$ เนื่องจาก $|sin(nx)| \le 1$ จะได้ว่า $|a_n sin(nx)| \le |a_n|$
และ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.7 สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(nx)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $(-\infty,\infty)$

ต่อไปจะแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx)$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $(-\infty,\infty)$

เนื่องจาก $|cos(nx)| \leq 1$ จะได้ว่า $|a_n cos(nx)| \leq |a_n|$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรม ลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.7 สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $(-\infty,\infty)$ ●

ตัวอย่าง 4.4.7 : สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n นิยามฟังก์ชัน f_n บน $D=[-1,1]$ โดยที่ $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ กำหนดให้ $f(x)=0$ สำหรับทุก $x \in D$ จงแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D แต่ $\{f_n'\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f' บน D

วิธีทำ : ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมี $N \in I^+$ ซึ่ง $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ สำหรับทุก $x \in D$ และทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n'\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f' บน D

สมมติลำดับ $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f' บน D ดังนั้นให้ $\varepsilon = \frac{1}{5}$ จะมี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$\left| f_n'(x) - f'(x) \right| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \in D$ และทุก $n \geq N$

เนื่องจาก $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ สำหรับทุก $x \in D$ จะได้ว่า $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$

และ $f(x)=0$ จะได้ $f'(x)=0$

พิจารณา $x=\frac{1}{2N}$ แล้ว $x\in D$ และ

$$\left|f_n'(x)-f'(x)\right| = \left|\frac{1-N^2\left(1/4N^2\right)}{\left(1+N^2\left(1/4N^2\right)\right)^2}\right| = \frac{12}{25} > \varepsilon$$ ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

ดังนั้นลำดับ $\left\{f_n'\right\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f' บน D ●

บทที่ 5
อิมพรอบเพออินทิกรัล
(IMPROPER INTEGRALS)

เราได้ศึกษาอิมพรอบเพออินทิกรัลมาแล้ว ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการลู่เข้าและการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล การทดสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม และผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล โดยเริ่มต้นจะขอทบทวนพื้นฐานเกี่ยวกับอิมพรอบเพออินทิกรัล

5.1 บทนิยามของอิมพรอบเพออินทิกรัล (Definition of Improper Integrals)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามของอิมพรอบเพออินทิกรัล และเมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันจะหมายถึงฟังก์ชันค่าจริง

บทนิยาม 5.1.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง $[a,b)$ สมมติ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,c]$ เมื่อ $a<c<b$ เราจะเรียกจุด b ว่า**ซิงกูลาร์พอยท์ (singular point)** หรือ**ซิงกูลาร์ริตี้ (singularity)** ของฟังก์ชัน f ถ้ามีลำดับ $\{x_n\}$ บนช่วง $[a,b)$ ซึ่งลู่เข้าสู่ b และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f\left(x_n\right)\right|=+\infty$ เรานิยาม**อิมพรอบเพออินทิกรัล (improper integral)** ของ f จาก a ถึง b เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$ ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

และกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่เข้า (converges)** ถ้า $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$ หาค่าได้ ถ้าไม่เป็นเช่นนี้จะกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่ออก (diverges)**

บทนิยาม 5.1.2 : ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง $(a,b]$ สมมติ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[d,b]$ เมื่อ $a<d<b$ เราจะเรียกจุด a ว่า **ซิงกูลาร์พอยท์ (singular point)** หรือ**ซิงกูลาร์ริตี้ (singularity)** ของฟังก์ชัน f ถ้ามีลำดับ $\{x_n\}$ บนช่วง $(a,b]$ ซึ่งลู่เข้าสู่ a และ $\lim_{n\to\infty}\left|f\left(x_n\right)\right|=+\infty$ เรานิยาม **อิมพรอบเพออินทิกรัล (improper integral)** ของ f จาก a ถึง b เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$ ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to a^+}\int_d^b f(x)dx$$

และกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่เข้า (converges)** ถ้า $\lim_{d\to a^+}\int_d^b f(x)dx$ หาค่าได้ ถ้าไม่เป็นเช่นนี้จะกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่ออก (diverges)**

บทนิยาม 5.1.3 : กำหนดช่วงจำกัด $[a,b]$ และ $a<c<b$ ให้ $\int_a^c f(x)dx$ และ $\int_c^b f(x)dx$ เป็นอิมพรอบเพออินทิกรัลตามบทนิยาม 5.1.1 และ 5.1.2 ตามลำดับ เราจะนิยาม**อิมพรอบเพออินทิกรัล (improper integral)** $\int_a^b f(x)dx$ **ดังนี้**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

และกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่เข้า (converges)** ถ้า $\int_a^c f(x)dx$ และ $\int_c^b f(x)dx$ ลู่เข้า และจะกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่ออก (diverges)** ถ้า $\int_a^c f(x)dx$ หรือ $\int_c^b f(x)dx$ ลู่ออก

บทนิยาม 5.1.4 : ให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,c]$ สำหรับทุก $c>a$ แล้ว**นิยามอิมพรอบเพออินทิกรัล (improper integral)** $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **ดังนี้**

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^{c} f(x)dx$$

และกล่าวว่า $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **ลู่เข้า (converges)** ถ้า $\lim_{c\to\infty}\int_a^{c} f(x)dx$ หาค่าได้ ถ้าไม่เป็นเช่นนี้จะกล่าวว่า $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **ลู่ออก (diverges)**

ตัวอย่าง 5.1.5 : จงตรวจสอบว่า $\int_4^{5}\frac{dx}{\sqrt{x-4}}$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เห็นได้ว่า $\int_4^{5}\frac{dx}{\sqrt{x-4}}$ เป็นอิมพรอบเพออินทิกรัลตามบทนิยาม 5.1.2

สำหรับ $d\in(4,5)$ จะได้ว่า

$$\lim_{d\to 4^+}\int_d^{5}\frac{dx}{\sqrt{x-4}} = \lim_{d\to 4^+}\left[2\sqrt{x-4}\Big|_d^5\right] = \lim_{d\to 4^+}(2-2\sqrt{d-4}) = 2$$

ซึ่ง $\lim_{d\to 4^+}\int_d^{5}\frac{dx}{\sqrt{x-4}}$ หาค่าได้ ดังนั้น $\int_4^{5}\frac{dx}{\sqrt{x-4}}$ ลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 5.1.6 : จงตรวจสอบว่า $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : ให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ สำหรับทุก $x\in[-1,1]$ จะได้ว่า $x = 0$ เป็นซิงกูลาร์พอยท์ของ $f(x)$ ดังนั้นโดยบทนิยาม 5.1.3 จะได้ว่า

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$$

พิจารณา $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$ สำหรับ $c\in(-1,0)$ จะได้ว่า

$$\lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^{c}\frac{1}{x^2}dx \;=\; \lim_{c\to 0^-}\left[-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{c}\right]$$
$$=\; \lim_{c\to 0^-}\left(-\frac{1}{c}+1\right) \;=\; +\infty$$

ดังนั้น $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$ ลู่ออก และสรุปได้ว่า $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ ลู่ออก ●

ตัวอย่าง 5.1.7: จงตรวจสอบว่า $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เห็นได้ว่า $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ เป็นอิมพรอบเพออินทิกรัลตามบทนิยาม 5.1.4 สำหรับ $c\in(1,\infty)$ จะได้ว่า

$$\lim_{c\to\infty}\int_{1}^{c}\frac{1}{x^2}dx \;=\; \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{c}\right]$$
$$=\; \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{c}+1\right) \;=\; 1$$

ดังนั้น $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ ลู่เข้า ●

5.2 การทดสอบการลู่เข้าของอิมพรอบเพออินทิกรัล (Tests for Convergence of Improper Integrals)

ในบทที่ผ่านมา เราได้ศึกษาการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชันมาแล้ว สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการทดสอบการลู่เข้าของอิมพรอบเพออินทิกรัล โดยจะกล่าวถึงการทดสอบเปรียบเทียบ และเกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของอิมพรอบเพออินทิกรัล โดยมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 5.2.1 : การทดสอบเปรียบเทียบ (The Comparison Test)

ให้ $0\le f(x)\le g(x)$ สำหรับทุก $x\in[a,\infty)$ ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ ต่อเนื่องบน $[a,\infty)$ แล้ว

(1) ถ้า $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ลู่เข้า แล้ว $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า

(2) ถ้า $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก แล้ว $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ลู่ออก

พิสูจน์ (1) **:** ให้ $c>a$ เนื่องจาก $0\le f(x)\le g(x)$ สำหรับทุก $x\in[a,\infty)$ และ $f(x)$, $g(x)$ ต่อเนื่องบน $[a,\infty)$ ดังนั้น

$$0 \;\le\; \int_a^c f(x)dx \;\le\; \int_a^c g(x)dx$$

พิจารณา $\int_a^c f(x)dx$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ c ที่มีค่าเพิ่มขึ้นและมีขอบเขตบน ดังนั้น $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า

(2) **:** ให้ $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่ออก สมมติ $\int_a^\infty g(x)dx$ ลู่เข้า ดังนั้นโดย (1) สรุปได้ว่า $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\int_a^\infty g(x)dx$ ลู่ออก ■

ข้อสังเกต 5.2.2 : ทฤษฎีบท 5.2.1 ยังเป็นจริงสำหรับอิมพรอบเพออินทิกรัลตามบทนิยาม 5.1.1 และ 5.1.2

ตัวอย่าง 5.2.3 : จงตรวจสอบว่า $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจาก $0 \le \frac{1}{e^x+1} \le \frac{1}{e^x}$ เมื่อ $x\in[0,\infty)$ เราจะแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx$ ลู่เข้า สำหรับ $c>0$ จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx \;=\; \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x}dx \;=\; \lim_{c\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^c \;=\; \lim_{c\to\infty}(1-e^{-c}) \;=\; 1$$

ดังนั้น $\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 5.2.1 จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}dx$ ลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 5.2.4 : จงแสดงว่า $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x}dx$ ลู่ออก เมื่อ $x\in(0,1]$

วิธีทำ : เนื่องจาก $0 \;\le\; \frac{1}{6x} \;\le\; \frac{1}{x^2+5x}$ เมื่อ $x\in(0,1]$

เราจะแสดงว่า $\int_0^1 \frac{1}{6x}dx$ ลู่ออก สำหรับ $0<d<1$ จะได้ว่า

$$\int_0^1 \frac{1}{6x}dx = \lim_{d\to 0^+}\int_d^1 \frac{1}{6x}dx = \frac{1}{6}\lim_{d\to 0^+} lnx\Big|_d^1 = \frac{1}{6}\lim_{d\to 0^+}(ln1-lnd) = -\infty$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{6x}dx$ ลู่ออก โดยข้อสังเกต 5.2.2 จะได้ว่า $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x}dx$ ลู่ออก เมื่อ $x\in(0,1]$ ●

ตัวอย่าง 5.2.5 : จงแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ ลู่เข้า

วิธีทำ : สำหรับ $d>0$ จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{d\to\infty}(arctanx\Big|_0^d) = \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ ลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 5.2.6 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของอิมพรอบเพออินทิกรัล (The Cauchy Criterion for Convergence of Improper Integrals)

ให้ b เป็นจำนวนจำกัดหรือบวกอนันต์ และให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง $[a,b)$ และอินทิเกรตได้บนช่วง $[a,c]$ สำหรับทุก $a<c<b$ แล้ว อิมพรอบเพออินทิกรัล $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ มีจำนวนจริง Y ซึ่ง $\left|\int_c^d f(x)dx\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $Y<c<d<b$

พิสูจน์ : จะแยกพิจารณา b เป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 : b เป็นจำนวนจำกัด

$(\to)$ ให้ $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า $\lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)dx$ หาค่าได้

ให้ $F(y) = \int_a^y f(x)dx$ นั่นคือ $\lim_{y\to b^-} F(y)$ หาค่าได้

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 2.39 จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้อง

$$|F(d) - F(c)| < \varepsilon$$

เมื่อ $0 < |d-b| < \delta$, $0 < |c-b| < \delta$ และ $c < d$

เลือก $Y = b - \delta$ ซึ่งเมื่อ $Y < c < d < b$ จะได้ว่า

$$\left|\int_c^d f(x)dx\right| = \left|\int_a^d f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| = |F(d) - F(c)| < \varepsilon$$

($\leftarrow$) ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมีจำนวนจริง Y ซึ่ง $\left|\int_c^d f(x)dx\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $Y < c < d < b$

เราต้องการแสดงว่า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า สำหรับ $a < y < b$ นิยาม $F(y) = \int_a^y f(x)dx$

เลือก $\delta = b - Y$ สำหรับ c, d ซึ่ง $Y < c < d < b$ จะได้ว่า

$$|F(d) - F(c)| = \left|\int_a^d f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| = \left|\int_c^d f(x)dx\right| < \varepsilon$$

จะได้ว่า $\lim_{y\to b^-} \int_a^y f(x)dx$ หาค่าได้ ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า

กรณีที่ 2 : $b = +\infty$

($\rightarrow$) ให้ $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า $\lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)dx$ หาค่าได้

ให้ $F(y) = \int_a^y f(x)dx$ นั่นคือ $\lim_{y\to\infty} F(y)$ หาค่าได้

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.39 จะมี $M > 0$ ซึ่ง

$$|F(d) - F(c)| < \varepsilon$$

เมื่อ $d > M$, $c > M$ และ $c < d$

เลือก $Y = M$ ซึ่งเมื่อ $Y < c < d < \infty$ จะได้ว่า

$$\left|\int_c^d f(x)dx\right| = \left|\int_a^d f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| = |F(d) - F(c)| < \varepsilon$$

$(\leftarrow)$ ให้ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริง Y ซึ่ง $\left|\int_c^d f(x)dx\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $Y < c < d < \infty$

เราต้องการแสดงว่า $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า

เลือก $M = Y$ ซึ่งเมื่อ $d > M$, $c > M$ และ $c < d$ จะได้ว่า

$$|F(d) - F(c)| = \left|\int_a^d f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| = \left|\int_c^d f(x)dx\right| < \varepsilon$$

จะได้ว่า $\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ หาค่าได้ ดังนั้น $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า ■

บทนิยาม 5.2.7 : กำหนดให้ $\int_a^b f(x)dx$ เป็นอิมพรอบเพออินทิกรัล เราจะกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (converges absolutely)** ถ้า $\int_a^b |f(x)|dx$ ลู่เข้า และกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (converges conditionally)** ถ้า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า แต่ $\int_a^b |f(x)|dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 5.2.8 : จงตรวจสอบว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

วิธีทำ : ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} sin\left(\frac{1}{x}\right)$

เนื่องจาก $0 \leq \left|sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ จะได้ว่า $0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

เราจะแสดงว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ลู่เข้า สำหรับ $0 < d < 1$ จะได้ว่า

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{d\to 0^+}\int_d^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{d\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_d^1 = \lim_{d\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{d}\right) = 2$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ลู่เข้า โดยข้อสังเกต 5.2.2 จะได้ว่า $\int_0^1 |f(x)|dx$ ลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ●

ทฤษฎีบท 5.2.9 : ถ้า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์แล้ว $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 5.2.10 : จงแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{sinxy}{1+y^2}dy$ ลู่เข้าเมื่อ $x \in R$

วิธีทำ : เนื่องจาก $0 \le |sinxy| \le 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x จะได้ว่า $\left|\frac{sinxy}{1+y^2}\right| \le \frac{1}{1+y^2}$ และโดยตัวอย่าง 5.2.5 และบทนิยาม 5.2.7 จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{sinxy}{1+y^2}dy$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.9 จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{sinxy}{1+y^2}dy$ ลู่เข้าเมื่อ $x \in R$ ●

ตัวอย่าง 5.2.11 : สำหรับแต่ละ $c \in R$ จงแสดงว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}e^{xy}dy$ ลู่เข้าเมื่อ $x \le c$

วิธีทำ : สำหรับแต่ละ $c \in R$ และเมื่อ $x \le c$ และ $0 \le y < 1$ แล้ว

$$0 \le \left|\frac{1}{\sqrt{1-y}}e^{xy}\right| \le \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}$$

เราจะแสดงว่า $\int_0^1 \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}dy$ ลู่เข้า สำหรับ $0 < d < 1$ จะได้ว่า

$$\int_0^1 \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}dy = \lim_{d \to 1^-} \int_0^d \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}dy = \lim_{d \to 1^-} e^{|c|}\left(-2\sqrt{1-y}\right)\Big|_0^d = 2e^{|c|}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}dy$ ลู่เข้า และโดยข้อสังเกต 5.2.2 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}e^{xy}dy$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.9 จะได้ว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}e^{xy}dy$ ลู่เข้า เมื่อ $x \le c$ ●

ตัวอย่าง 5.2.12 : สำหรับแต่ละ $c > 0$ จงแสดงว่า $\int_0^2 \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}}e^{2xy}dy$ ลู่เข้าเมื่อ $x \le c$

วิธีทำ : สำหรับแต่ละ $c \in R$ และเมื่อ $x \le c$ และ $0 \le y < 2$ แล้ว

$$0 \le \left| \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}} e^{2xy} \right| \le \frac{e^{4c}}{\sqrt{4-y^2}}$$

เราจะแสดงว่า $\int_0^2 \frac{e^{4c}}{\sqrt{4-y^2}}dy$ ลู่เข้า สำหรับ $0<d<2$ จะได้ว่า

$$\int_0^2 \frac{e^{4c}}{\sqrt{4-y^2}}dy = \lim_{d\to 2^-} \int_0^d \frac{e^{4c}}{\sqrt{4-y^2}}dy = -\frac{\pi}{2}e^{4c}$$

ดังนั้น $\int_0^2 \frac{e^{4c}}{\sqrt{4-y^2}}dy$ ลู่เข้า และโดยข้อสังเกต 5.2.2 จะได้ว่า $\int_0^2 \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}}e^{2xy}dy$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.9 จะได้ว่า $\int_0^2 \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}}e^{2xy}dy$ ลู่เข้า เมื่อ $x \le c$ ●

5.3 การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล (Uniform Convergence of Improper Integrals)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการลู่เข้าของอิมพรอบเพออินทิกรัล $\int_c^d F(x,y)dy$ เมื่อ $x \in [a,b]$ เรียกการลู่เข้าแบบนี้ว่าการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม และจะศึกษาการทดสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล เช่นเกณฑ์ของโคชีของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์สำหรับอิมพรอบเพออินทิกรัล เป็นต้น โดยเริ่มต้นจะกล่าวถึงบทนิยามของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล

บทนิยาม 5.3.1 กำหนดให้ $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรบน $[a,b]\times[c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ สมมติว่าสำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ ซึ่ง $\int_c^d F(x,y)dy$ เป็นอิมพรอบเพออินทิกรัลลู่เข้า เราจะกล่าวว่าอิมพรอบเพออินทิกรัล $\int_c^d F(x,y)dy$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน** $[a,b]$ **(converges uniformly on** $[a,b]$**)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $Y \in (c,d)$ ซึ่งทำให้

$$\left| \int_\alpha^d F(x,y)dy \right| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } \alpha > Y \text{ และทุก } x \in [a,b]$$

ทฤษฎีบท 5.3.2 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล (The Cauchy Criterion for Convergence of Improper Integrals)

กำหนดให้ $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรนิยามบน $[a,b]\times[c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ อิมพรอบเพออินทิกรัล $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $Y\in(c,d)$ ซึ่งทำให้

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} F(x,y)dy\right|<\varepsilon \text{ สำหรับทุก } Y<y_1<y_2<d \text{ และทุก } x\in[a,b]$$

พิสูจน์ : จะพิสูจน์กรณีที่ $d=+\infty$

$(\rightarrow)$ ให้ $\varepsilon>0$

เนื่องจาก $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ ดังนั้นมี $Y\in(c,d)$ ซึ่งทำให้

$$\left|\int_{\alpha}^{d} F(x,y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับทุก } \alpha>Y \text{ และทุก } x\in[a,b]$$

พิจารณา $Y<y_1<y_2<d$ และทุก $x\in[a,b]$ จะได้

$$\begin{aligned}\left|\int_{y_1}^{y_2} F(x,y)dy\right| &= \left|\int_{y_1}^{d} F(x,y)dy-\int_{y_2}^{d} F(x,y)dy\right|\\ &\le \left|\int_{y_1}^{d} F(x,y)dy\right|+\left|\int_{y_2}^{d} F(x,y)dy\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

$(\leftarrow)$ ให้ $\varepsilon>0$ จะมี $Y\in(c,d)$ ซึ่งทำให้

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} F(x,y)dy\right|<\varepsilon \text{ สำหรับทุก } Y<y_1<y_2<d \text{ และทุก } x\in[a,b]$$

จะพิสูจน์ว่า $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ ให้ $\varepsilon>0$ โดยที่สิ่งที่กำหนดให้จะมี $Y\in(c,d)$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\left|\int_{y}^{y'} F(x,y)dy\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ทุก } x \in [a,b]$$

เมื่อ $y, y' > Y$

ให้ x และ y มีค่าคงที่ และพิจารณาลิมิตที่ y' เข้าใกล้ ∞ จะได้ว่า

$$\lim_{y'\to\infty}\left|\int_{y}^{y'} F(x,y)dy\right| = \left|\int_{y}^{\infty} F(x,y)dy\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\int_{c}^{d} F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ ■

ทฤษฎีบท5.3.3 : การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์สำหรับอิมพรอบเพออินทิกรัล(Weierstrass M – test for Improper Integrals)

กำหนดให้ $\int_{c}^{d} F(x,y)dy$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรบน $[a,b]\times[c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ สมมติอิมพรอบเพออินทิกรัล $\int_{c}^{d} F(x,y)dy$ ลู่เข้าบน $[a,b]$ และมีฟังก์ชัน M บน $[c,d]$ ซึ่ง $|F(x,y)| \leq M(y)$ และ $\int_{c}^{d} M(y)dy$ ลู่เข้า แล้วได้ว่า $\int_{c}^{d} F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\int_{c}^{d} M(y)dy$ ลู่เข้า จะได้ว่ามี $\alpha > Y$ ซึ่ง

$$0 \leq \int_{\alpha}^{d} M(y)dy < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้นถ้า $\alpha > Y$ จะได้ว่า

$$\left|\int_{\alpha}^{d} F(x,y)dy\right| \leq \int_{\alpha}^{d} |F(x,y)|dy \leq \int_{\alpha}^{d} M(y)dy < \varepsilon$$

ดังนั้น $\int_{c}^{d} F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ ■

ตัวอย่าง 5.3.4 : จงแสดงว่า $\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{1+y^2} dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R

วิธีทำ : ให้ $F(x,y) = \frac{\sin xy}{1+y^2}$ โดยตัวอย่าง 5.2.10 จะได้ว่า $\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{1+y^2} dy$ ลู่เข้าบน R

และ

$$|F(x,y)| = \left|\frac{\sin xy}{1+y^2}\right| \leq \frac{1}{1+y^2}$$

ให้ $M(y) = \frac{1}{1+y^2}$ สำหรับทุก $y \in [0,\infty)$ จะได้ว่า

$$\int_0^{\infty} M(y)dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

และ $\int_0^{\infty} M(y)dy$ ลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.3.3 จะได้ว่า $\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{1+y^2} dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R ●

ตัวอย่าง 5.3.5 : สำหรับแต่ละ $c \in R$ จงแสดงว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} e^{xy} dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสำหรับ

$x \leq c$

วิธีทำ : ให้ $F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}} e^{xy}$

โดยตัวอย่าง 5.2.11 จะได้ว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} e^{xy} dy$ ลู่เข้าบน $(-\infty, c]$ และเมื่อ $c \in R$ จะได้ว่า

$$|F(x,y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{1-y}} e^{xy}\right| \leq \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}$$

ให้ $M(y) = \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}$ สำหรับทุก $y \in [0,1)$ จะได้ว่า

$$\int_0^1 M(y)dy = \int_0^1 \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}} dy = e^{|c|}\left(-2\sqrt{1-y}\Big|_0^1\right) = 2e^{|c|}$$

และ $\int_0^1 M(y)dy$ ลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.3.3 จะได้ว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} e^{xy} dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสำหรับ $x \le c$ ●

ตัวอย่าง 5.3.7 : สำหรับแต่ละ $c > 0$ จงแสดงว่า $\int_0^2 \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}} e^{2xy} dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสำหรับ $x \le c$

วิธีทำ : ให้ $F(x,y) = \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}} e^{2xy}$

โดยตัวอย่าง 5.2.12 จะได้ว่า $\int_0^2 \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}} e^{2xy} dy$ ลู่เข้าบน $(-\infty, c]$ และเมื่อ $c > 0$ จะได้ว่า

$$|F(x,y)| = \left| \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}} e^{2xy} \right| \le \frac{e^{2xy}}{\sqrt{4-y^2}} \le \frac{e^{4c}}{\sqrt{4-y^2}}$$

ให้ $M(y) = \frac{e^{|c|}}{\sqrt{1-y}}$ สำหรับทุก $y \in [0,2)$ จะได้ว่า

$$\int_0^2 M(y) dy = \int_0^2 \frac{e^{4c}}{\sqrt{4-y^2}} dy = \frac{\pi}{2} e^{4c}$$

และ $\int_0^2 M(y) dy$ ลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.3.3 จะได้ว่า $\int_0^2 \frac{sinxy}{\sqrt{4-y^2}} e^{2xy} dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสำหรับ $x \le c$ ●

5.4 ผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล (Consequences of Uniform Convergence of Improper Integrals)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงผลสืบเนื่องของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 5.4.1 : ให้ F เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและต่อเนื่องบน $[a,b] \times [c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ และสมมติให้ d เป็นซิงกูลาร์พอยท์ของ F และ นิยาม f บน $[a,b]$ ดังนี้

$$f(x)=\int_c^d F(x,y)dy$$

ถ้า $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม แล้ว f ต่อเนื่องบน $[a,b]$

พิสูจน์ : ให้ $x_1,x_2\in[a,b]$ และให้ $\varepsilon>0$ จะมี Y ซึ่ง

$\left|\int_\alpha^d F(x,y)dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ สำหรับทุก $x\in[a,b]$ และเมื่อ $Y<\alpha<d$

เนื่องจาก F มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์ม ดังนั้นมี $\delta(\varepsilon)$ ซึ่งถ้า $|x_1-x_2|<\delta$ แล้ว

$$|F(x_1,y)-F(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{3(\alpha-c)}$$

ดังนั้นถ้า $|x_1-x_2|<\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|f(x_1)-f(x_2)| &= \left|\int_c^d F(x_1,y)dy-\int_c^d F(x_2,y)dy\right| \\
&= \left|\int_c^d [F(x_1,y)-F(x_2,y)]\,dy\right| \\
&= \left|\int_c^\alpha [F(x_1,y)-F(x_2,y)]dy+\int_\alpha^d [F(x_1,y)-F(x_2,y)]dy\right| \\
&\le \int_c^\alpha |F(x_1,y)-F(x_2,y)|dy+\left|\int_\alpha^d F(x_1,y)dy\right|+\left|\int_\alpha^d F(x_2,y)dy\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3(\alpha-c)}(\alpha-c) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ■

เงื่อนไขของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มในทฤษฎีบท 5.4.1 มีความจำเป็น และเราจะใช้ผลของทฤษฎีบทนี้ในการตรวจสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล

ตัวอย่าง 5.4.2 : กำหนดให้ $F(x,y)=3xy^2e^{-xy^3}$ นิยาม f บน $[0,\infty)$ โดย $f(x)=\int_0^\infty F(x,y)dy$

จงแสดงว่า $\int_0^\infty 3xy^2e^{-xy^3}\,dy$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[0,\infty)$

พิสูจน์ : ให้ $F(x,y)=3xy^2e^{-xy^3}$ และนิยาม f บน $[0,\infty)$ โดย

$$f(x)=\int_0^\infty F(x,y)dy$$

แล้วได้ว่า

ถ้า $x>0$ จะได้ว่า $f(x) = \int_0^\infty 3xy^2e^{-xy^3}dy = -\int_0^\infty e^{-xy^3}d(-xy^3) = 1$

ถ้า $x=0$ จะได้ว่า $f(x)=0$ นั่นคือ

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x>0 \\ 0 & \text{ถ้า } x=0 \end{cases}$$

โดยบทนิยาม 2.37 จะได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องบน $[0,\infty)$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.4.1 จะได้ว่า $\int_0^\infty 3xy^2e^{-xy^3}dy$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[0,\infty)$ ●

สำหรับทฤษฎีบทต่อไป จะขอละการพิสูจน์ แต่จะมีตัวอย่างการนำทฤษฎีบทดังกล่าวไปใช้ ซึ่งผู้ที่สนใจสามารถอ่านบทพิสูจน์ได้จาก [1]

ทฤษฎีบท 5.4.3 : ให้ F เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและต่อเนื่องบน $[a,b]\times[c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นค่าอนันต์ สมมติว่าเงื่อนไขต่อไปนี้สอดคล้อง

(1) F อินทิเกรตได้บน $[a,b]\times[c,t]$ เมื่อ $t\in[c,d)$

(2) สำหรับทุก $x\in[a,b]$ และทุก $t\in[c,d)$ จะได้ว่า $\int_c^t F(x,y)dy$ หาค่าได้

(3) $\int_a^b F(x,y)dx$ หาค่าได้ สำหรับทุก $y\in[c,d)$

นิยามฟังก์ชัน f บน $[a,b]$ โดย $f(x) = \int_c^d F(x,y)dy$ ถ้า $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ แล้วจะได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$$\int_a^b f = \int_a^b\int_c^d F(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b F(x,y)dxdy$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงความสำคัญของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของ $\int_c^d F(x,y)dy$ ที่มีผลต่อการสลับลำดับของการอินทิเกรตได้ในทฤษฎีบท 5.4.3 และเราจะใช้ทฤษฎีบทนี้ในการตรวจสอบการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอิมพรอบเพออินทิกรัล

ตัวอย่าง 5.4.4 : กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรบน $[0,\infty)\times[0,1]$ โดย

$$F(x,y)=\left(2y-2xy^3\right)e^{-xy^2}$$

และถ้า f นิยามบน $[0,\infty)$ ดังนี้ $f(x)=\int_0^1 F(x,y)dy$ จงแสดงว่า $\int_0^1 F(x,y)dy$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

พิสูจน์ : เนื่องจาก

$$\int_0^\infty F(x,y)dx \;=\; \lim_{t\to\infty}\int_0^t \left(2y-2xy^3\right)e^{-xy^2}dx \;=\; 0$$

จะได้ว่า

$$\int_0^1\int_0^\infty F(x,y)dxdy \;=\; 0$$

แต่

$$\int_0^\infty\int_0^1 F(x,y)dydx \;=\; \int_0^\infty e^{-x}dx \;=\; 1 \;\neq\; \int_0^1\int_0^\infty F(x,y)dxdy$$

ดังนั้น $\int_0^\infty F(x,y)dy$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[0,1]$ ●

ทฤษฎีบท 5.4.5: ให้ F เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและ $\frac{\partial F}{\partial x}$ ต่อเนื่องบน $[a,b]\times[c,d)$ โดยที่ d อาจเป็นบวกอนันต์ ถ้ามี $x_0\in[a,b]$ ซึ่ง $\int_c^d F(x_0,y)dy$ ลู่เข้า และ $\int_c^d \frac{\partial F}{\partial x}dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ แล้ว $\int_c^d F(x,y)dy$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ และถ้า

$$f(x) \;=\; \int_c^d F(x,y)dy \quad \text{เมื่อ} \quad x\in[a,b]$$

แล้ว f หาอนุพนธ์ได้ และ

$$f'(x) = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dy$$

ตัวอย่าง 5.4.6 : กำหนด $f(x) = \int_0^\infty x^3 e^{-x^2 y}\,dy$ จงแสดงว่า $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2 y}\,dy$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R

วิธีทำ : เนื่องจาก $f(x) = \int_0^\infty x^3 e^{-x^2 y}\,dy = x$ สำหรับทุก $x \in R$

และ $f'(x) = 1$ สำหรับทุก $x \in R$ แต่

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 e^{-x^2 y}\right)dy = \int_0^\infty \left(3x^2 - 2x^4 y\right)e^{-x^2 y}\,dy$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.4.5 จะได้ว่า $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2 y}\,dy$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน R ●

บรรณานุกรม

[1] วารี เกรอต **แคลคูลัส** สำนักพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด 2539

[2] วารี เกรอต **แคลคูลัสขั้นสูง** โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร 2529

[3] De Lillo, J.N., **Advanced Calculus with Applications**, Macmillan Publishing Co.Inc., 1982 .

[4] Fitzpatrick, M.P., **Advanced Calculus**, PWS Publishing Company, 1996.

[5] Fulks, W., **Advanced Calculus**, John Wiley&Sons, Inc., 1981.

[6] Narayan, S., **Mathematical Analysis**, S.Chand&Co.Ltd, 10^{th} ed., 1971.

[7] Olmstwd, M.H.J., **Advanced Calculus**, New York : Appletion-Century-Crofts, 1961.

[8] Parzynski, R.W. and Zipse, W., **Introduction to Mathematical Analysis**, Mc Graw – Hill Book Co., 1987.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นางสาวนริศรา สุขผ่อง
ที่อยู่	17 หมู่ 4 ตำบลชำแระ อำเภอโพธาราม จังหวัดราชบุรี 70120
ที่ทำงาน	โรงเรียนบรมราชินีนาถราชวิทยาลัย ตำบลอ่างหิน อำเภอปากท่อ จังหวัดราชบุรี 70140

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2543	สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยมอันดับ 2) ภาควิชามัธยมศึกษา สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพฯ โดยรับทุนการศึกษาในโครงการ รพค.
พ.ศ. 2546	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ จังหวัดนครปฐม

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2543-2547	ครูสอนคณิตศาสตร์ โรงเรียนสารสิทธิ์พิทยาลัย จังหวัดราชบุรี
พ.ศ. 2547-ปัจจุบัน	ครู คศ.1 โรงเรียนบรมราชินีนาถราชวิทยาลัย จังหวัดราชบุรี