ทฤษฎีของลำดับของจำนวนจริง

โดย

นางดรรชนี กิจสมัคร

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2549

ISBN 974-11-6231-6

THEORY OF SEQUENCES OF REAL NUMBERS

By

Dutchanee Kitsamak

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2006

ISBN 974-11-6231-6

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง "ทฤษฎีของลำดับของจำนวนจริง" เสนอโดย นางดรรชนี กิจสมัคร เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....

(รองศาสตราจารย์ ดร. วิสาข์ จัติวัตร์)

รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ รักษาราชการแทน

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่..........เดือน..........................พ.ศ............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

………../……………/……….

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

………../……………/……….

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

………../……………/……….

K 46308303 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : ทฤษฎีของลำดับของจำนวนจริง

ดรรชนี กิจสมัคร : ทฤษฎีของลำดับของจำนวนจริง (THEORY OF SEQUENCES OF REAL NUMBERS) อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ.วารี เกรอต. 61 หน้า. ISBN 974-11-6231-6

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ เราเริ่มต้นโดยการนำเสนอบทนิยามของลำดับลู่เข้าซึ่งแตกต่างจากบทนิยามของลำดับที่ทราบกันดี โดยการนิยามในลักษณะแรกเป็นการนิยามโดย *Narayan* กล่าวคือ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับที่มีขอบเขตและมีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว ส่วนการนิยามอีกลักษณะหนึ่งเป็นบทนิยามที่เราคุ้นเคยดี นั่นคือ ถ้าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ ลู่เข้า แล้ว จะมีจำนวนจริง l ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - l| < \varepsilon$ ทุกจำนวนเต็ม $n \geq N$ เราได้พิสูจน์ว่าบทนิยามทั้ง 2 ลักษณะเป็นบทนิยามที่สมมูลกัน สุดท้ายเราศึกษาทฤษฎีบทซึ่งเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ โดยการศึกษารวบรวมทฤษฎีบทพื้นฐานเพื่อนำไปใช้สำหรับการหาลิมิตของลำดับ และทฤษฎีบทที่สำคัญซึ่งให้ข้อสรุปเกี่ยวกับการลู่เข้าของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ และหลักการคอนแทรคชัน รวมทั้งทฤษฎีบทอื่นๆ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2549

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์...

K 46308303 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORD : THEORY OF SEQUENCES OF REAL NUMBERS.

DUTCHANEE KITSAMAK : THEORY OF SEQUENCES OF REAL NUMBERS. MASTER'S REPORT ADVISOR : ASSOC. PROF. WAREE KAROT. 61 pp.

ISBN 974-11-6231-6

In this project we first define a convergent sequence of real numbers to be the sequence that is bounded and has unique limit point. This definition was given by Narayan which is different from the well known definition of a convergent sequence $\{a_n\}$: i.e. there is a real number l satisfying that for each given $\varepsilon > 0$, there is a positive integer N such that $|a_n - l| < \varepsilon$ for all integers $n \geq N$. Then we prove that the two definitions are equivalent and we study basic theorems of sequencial limits in order to find limits of sequences. Finally we study various theorems related to convergence of sequences such as the Monotone Convergence Theorem, the Cauchy Convergence Criterion for Sequences and the Contraction Principle.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2006

Student's signature ……………………………………………..………..……….

Master's Report Advisor's signature …………………………………..…………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์วารี เกรอต อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มและแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติและภาควิชาคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ความรู้ ทั้งในระดับปริญญาตรีและปริญญาโท จนทำให้ศิษย์คนนี้ประสบความสำเร็จในด้านการศึกษา และสามารถนำสิ่งที่เรียนรู้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ได้อย่างถูกต้อง

ขอขอบคุณทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือ และให้คำแนะนำในการศึกษา โดยเฉพาะเพื่อน ๆ ที่ศึกษาร่วมรุ่นเดียวกัน

สุดท้ายขอบคุณครอบครัวที่ให้การสนับสนุน และกำลังใจในการศึกษาจนทำให้ประสบความสำเร็จได้ในวันนี้

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

(INTRODUCTION)

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้เราจะศึกษาทฤษฎีของลำดับของจำนวนจริง ซึ่งลำดับของจำนวนจริง คือ ลำดับซึ่งมีเรนจ์เป็นสับเซตของ $\boldsymbol{R}$ และจะเขียนแทนลำดับ f ซึ่ง $f(n) = a_n$ ด้วย $\{a_n\}$ หรือ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ เรียก a_n ว่าเทอมที่ n (n^{th} *term*) ของลำดับ และเรียก n ว่า *index* สำหรับลำดับ เมื่อ $n \in \boldsymbol{I}^+$

เราเริ่มต้นโดยการนำเสนอบทนิยามของลำดับลู่เข้าว่าเป็นลำดับมีขอบเขตที่มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียวซึ่งเป็นการนิยามโดย *Narayan* และแตกต่างจากบทนิยามของลำดับที่ทราบกันดี กล่าวคือ ถ้าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ ลู่เข้า แล้ว จะมีจำนวนจริง l ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - l| < \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq N$ เราได้พิสูจน์ว่า บทนิยามทั้ง 2 ลักษณะเป็นบทนิยามที่สมมูลกัน

สุดท้ายเราศึกษาทฤษฎีบทซึ่งเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ โดยการศึกษารวบรวมทฤษฎีบทพื้นฐานต่าง ๆ เพื่อนำไปใช้สำหรับการหาลิมิตของลำดับ หรือตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ นอกจากนี้เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่สำคัญซึ่งให้ข้อสรุปเกี่ยวกับการลู่เข้าของลำดับ โดยไม่กล่าวถึงลิมิตของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ และหลักการคอนแทรคชันรวมทั้งทฤษฎีบทอื่นๆ ซึ่งเนื้อหาในแต่ละบทมีรายละเอียดดังนี้

บทที่ 2 : เราจะกล่าวถึงบทนิยามของลำดับลู่เข้าของ *Narayan* และบทนิยามของลำดับที่ทราบกันดี โดยได้พิสูจน์ว่าบทนิยามทั้ง 2 ลักษณะสมมูลกัน

บทที่ 3 : เราจะศึกษารวบรวมทฤษฎีบทพื้นฐาน ซึ่งนำไปใช้หาลิมิตของลำดับและทฤษฎีบทที่สำคัญซึ่งให้ข้อสรุปเกี่ยวกับการลู่เข้าของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ และหลักการคอนแทรคชัน

บทที่ 2
ลำดับของจำนวนจริง
(SEQUENCES OF REAL NUMBERS)

ในบทนี้เราจะเริ่มต้นโดยการนำเสนอบทนิยามของลำดับลู่เข้าว่าเป็นลำดับมีขอบเขตที่มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียวซึ่งเป็นบทนิยามของ *Narayan* [3] สำหรับบทนิยามของลำดับลู่เข้าที่ทราบกันดี คือ ถ้าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ ลู่เข้า แล้ว จะมีจำนวนจริง l ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสุดท้ายเราได้พิสูจน์ว่าบทนิยามทั้ง 2 ลักษณะเป็นบทนิยามที่สมมูลกัน

2.1 บทนิยามของลำดับของจำนวนจริง (*Definition of Sequences of Real Numbers*)

จะขอเริ่มต้นด้วยการกำหนดสัญลักษณ์แทนเซตต่าง ๆ ที่ใช้ในสารนิพนธ์ดังต่อไปนี้

$\boldsymbol{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

$\boldsymbol{I}^+$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

และเขียน $A \subset B$ แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

บทนิยาม 2.1.1 : **ลำดับ (*sequence*)** คือฟังก์ชันซึ่งโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

ลำดับของจำนวนจริง คือ ลำดับซึ่งมีเรนจ์เป็นสับเซตของ $\boldsymbol{R}$ และจะเขียนแทนลำดับ f ซึ่ง $f(n) = a_n$ ด้วย $\{a_n\}$ หรือ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ เรียก a_n ว่า**เทอมที่ $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n^{th}}$ *term*)** ของลำดับและเรียก n ว่า **ดัชนี (*index*)** สำหรับลำดับ เมื่อ $n \in \boldsymbol{I}^+$

ในสารนิพนธ์นี้ถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่น เมื่อกล่าวถึงลำดับจะหมายถึงลำดับของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.1.2 : ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับ $\{a_n\}$

(1) $a_n = (-1)^n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(2) ให้ $c \in (-1, 1)$ และ $a_n = c^n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(3) ให้ $r \in \boldsymbol{R}$ และสำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ นิยาม $\{a_n\}$ ดังนี้

$$a_n = r + r^2 + \ldots + r^n$$

(4) ให้ $a_1 = 1$ และสำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ นิยาม $\{a_n\}$ ดังนี้

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{n} & \text{เมื่อ } a_n^2 \le 2 \\ a_n - \frac{1}{n} & \text{เมื่อ } a_n^2 > 2 \end{cases}$$

เราจะเรียกลำดับซึ่งนิยามใน (4) ว่า **ลำดับรีเคอซีฟ (*recursive sequence*)** กล่าวคือ เป็นลำดับ $\{a_n\}$ ซึ่งนิยาม a_n ในเทอมของ a_k เมื่อ $k < n$

ในหัวข้อต่อไปเราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆที่เกี่ยวกับลำดับมีขอบเขตและจุดลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ โดยเราจะพิสูจน์ว่าทุกลำดับซึ่งมีขอบเขตมีจุดลิมิต

2.2 ลำดับมีขอบเขตและจุดลิมิต (*Bounded Sequences and Limit Points*)

บทนิยาม 2.2.1 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เราเรียกจำนวนจริง u ว่า **ขอบเขตบน *(upper bound)*** ของเซต A ถ้า $u \ge x$ เมื่อ $x \in A$

บทนิยาม 2.2.2: กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เราเรียกจำนวนจริง l ว่า **ขอบเขตล่าง *(lower bound)*** ของเซต A ถ้า $l \le x$ เมื่อ $x \in A$

บทนิยาม 2.2.3 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เรากล่าวว่า A เป็น**เซตมีขอบเขต (*bounded set*)** ถ้ามีช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $A \subset [a\,,b]$

บทนิยาม 2.2.4 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับมีขอบเขต (*bounded sequence*)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \le M$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เห็นได้ชัดว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ $\{a_n : n \in \boldsymbol{I}^+\}$ มีทั้งขอบเขตล่างและขอบเขตบน

ตัวอย่าง 2.2.5 : จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ กำหนดต่อไปนี้เป็นลำดับมีขอบเขตหรือไม่

(1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(2) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(3) $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$

พิสูจน์ : (1) ให้ $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|a_n| &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right] \\
&= 2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&\le 3
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

(2) ให้ $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ประการแรกจะแสดงว่า $a_{2^n} \ge 1+\frac{n}{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$a_{2^n} \ge 1+\frac{n}{2}$$

เราจะแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(i) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า

$$a_2 = 1+\frac{1}{2} \text{ และ } 1+\frac{1}{2} \ge 1+\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $a_2 \ge 1+\frac{1}{2}$

(ii) ให้ $k \in \boldsymbol{I}^+$ และ $P(k)$ จริง นั่นคือ $a_{2^k} \ge 1+\frac{k}{2}$ แล้วได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a_{2^{k+1}} &= a_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^k 2} \\
&\ge 1 + \frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^k 2} \\
&= 1+\frac{k+1}{2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $a_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ต่อไปจะแสดงว่าทุกจำนวนจริงบวก M ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$

ให้ $M>0$ เลือก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $1+\frac{n}{2} > M$ ดังนั้น

$$\left|a_{2^n}\right| \geq 1+\frac{n}{2} > M$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

(3) ให้ $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|a_n| &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right] \\
&= 1+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&< 2
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ●

บทนิยาม 2.2.6 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ และ A เป็นเซตมีขอบเขต เราเรียกจำนวนจริง g ว่า **สมาชิกค่ามากสุด *(greatest member)*** ของ A ถ้า $g \in A$ และ g เป็นขอบเขตบนของ A

บทนิยาม 2.2.7 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ และ A เป็นเซตมีขอบเขต เราเรียกจำนวนจริง l ว่า **สมาชิกค่าน้อยสุด *(smallest member)*** ของ A ถ้า $l \in A$ และ l เป็นขอบเขตล่างของ A

บทนิยาม 2.2.8 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง u เป็น**ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (*least upper bound*)** ของ A หรือ ***supremum*** ของ A ถ้า u สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) u เป็นขอบเขตบนของ A

(2) ถ้าจำนวนจริง u' เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $u' \geq u$

บทนิยาม 2.2.9 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง l เป็น**ขอบเขตล่างค่ามากสุด (*greatest lower bound*)** ของ A หรือ ***infimum*** ของ A ถ้า l สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) l เป็นขอบเขตล่างของ A

(2) ถ้าจำนวนจริง l' เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $l \geq l'$

บทนิยาม 2.2.10 : กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง แล้ว **อาณาเขต (*neighbourhood*)** ของ x คือช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง $x \in (a,b)$

บทนิยาม 2.2.11 : ให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ จะกล่าวว่าจำนวนจริง x เป็น**จุดลิมิต (*limit point*)** ของ A ถ้าแต่ละอาณาเขต (a,b) ของ x เราได้ว่า $\{y : y \in A$ และ $y \in (a,b)\}$ เป็นเซตอนันต์

บทนิยาม 2.2.12 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $\{n : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้วจะกล่าวว่า a เป็น**จุดลิมิต (*limit point*)** ของ $\{a_n\}$

เห็นได้ว่า a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอมซึ่ง $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

ตัวอย่าง 2.2.13 : จงแสดงว่า

(1) ลำดับ $\{c\}$ มี c เป็นจุดลิมิตเพียงค่าเดียว เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

(2) ลำดับ $\{a_n\}$ มี 0 เป็นจุดลิมิตเพียงค่าเดียว เมื่อ $a_n = \frac{1}{n}$

(3) ลำดับ $\{a_n\}$ มี -1 และ 1 เป็นจุดลิมิต เมื่อ $a_n = (-1)^n$

(4) ลำดับ $\{a_n\}$ ไม่มีจุดลิมิต เมื่อ $a_n = n$

พิสูจน์ : (1) การพิสูจน์เห็นได้ชัด

(2) ประการแรกจะแสดงว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

เพราะฉะนั้น 0 เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $0 \neq a$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

กรณีที่ 1 : $a > 0$

เลือก $\varepsilon = \frac{a}{2}$ พิจารณาช่วง $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$

เลือก $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $\frac{1}{N} < \frac{a}{2}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{a}{2}$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$

นั่นคือ มีเทอม a_n อย่างมากจำนวน $N-1$ เทอม ซึ่ง $a_n \in (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2})$

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

กรณีที่ 2 : $a<0$

เลือก $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ พิจารณาช่วง $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = (\frac{3a}{2}, \frac{a}{2})$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

เห็นได้ชัดว่า $a_n \notin (\frac{3a}{2}, \frac{a}{2})$ สำหรับทุก n

เพราะว่า $a_n > 0$ ดังนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

(3) ประการแรกจะแสดงว่า 1 เป็น จุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ n ใด ๆ จะได้ว่า $(-1)^n = 1 < 1+\varepsilon$

ดังนั้น มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

เพราะฉะนั้น 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ n ใด ๆ จะได้ว่า $(-1)^n = -1 > -1-\varepsilon$

ดังนั้น มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$

เพราะฉะนั้น -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \neq 1$ หรือ $a \neq -1$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 1 : $a < -1$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}|a+1|$ แล้ว $a+\varepsilon < -1$ และ $a+\varepsilon < 1$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

เพราะว่า $a_n = -1$ หรือ $a_n = 1$ ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก n

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

กรณีที่ 2 : $a > 1$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 : $-1 < a < 1$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{|a+1|, |a-1|\}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

แล้ว $1 \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ และ $-1 \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก n เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

(4) เราจะแสดงว่า $\{a_n\}$ ไม่มีจุดลิมิต

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $n > a+\varepsilon$

จะได้ว่า $a_k \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ทุกจำนวนเต็ม $k \geq n$
ดังนั้น มีเทอม a_k อย่างมากจำนวน $n-1$ เทอม ซึ่ง $a_k \in (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$
เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{n\}$ ●

ข้อสังเกต 2.2.14 : a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ
ให้ $\varepsilon > 0$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก $m' \geq m$ ซึ่ง $a_{m'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $(*)$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ให้ $\varepsilon > 0$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวก สมมติว่า m' เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $m' \geq m$ และ $a_{m'} \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
นั่นคือ มีเทอม a_n อย่างมากจำนวน $m-1$ เทอม ซึ่ง $a_n \in (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับการเป็นจุดลิมิตของ a ดังนั้น มีจำนวนเต็ม $m' \geq m$ ซึ่ง $a_{m'} \in (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ $(*)$ เป็นจริง และ ให้ $\varepsilon > 0$
เลือกจำนวนเต็มบวก $m_1 = 1$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก $m_1' \geq m_1$ ซึ่ง $a_{m_1'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
เลือกจำนวนเต็มบวก $m_2 = m_1' + 1$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก $m_2' \geq m_2$ ซึ่ง $a_{m_2'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
เลือกจำนวนเต็มบวก $m_3 = m_2' + 1$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก $m_3' \geq m_3$ ซึ่ง $a_{m_3'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$\vdots$

นั่นคือ สำหรับทุกจำนวนเต็ม k เมื่อ $k \geq 3$ เลือกจำนวนเต็มบวก $m_{k+1}' \geq m_{k+1}$ โดยที่ $m_{k+1} = m_k' + 1$ ซึ่งทำให้ $a_{m_{k+1}'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
ดังนั้น $\{m' : a_{m'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์
เพราะฉะนั้น a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ■

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.15 : Bolzano – Weierstrass Theorem

ทุกเซตอนันต์ที่มีขอบเขตจะมีจุดลิมิต

พิสูจน์ : สามารถดูการพิสูจน์จาก [3]

ทฤษฎีบท 2.2.16 : ทุกลำดับซึ่งมีขอบเขตมีจุดลิมิต

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ ให้ $A = \{a_n : n \in \boldsymbol{I}^+\}$
พิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : A เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น มี $c \in A$ ซึ่ง $\{n : a_n = c\}$ เป็นเซตอนันต์ เพราะฉะนั้น c เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 2 : A เป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ดังนั้น A เป็นเซตอนันต์ซึ่งมีขอบเขต

โดย *Bolzano – Weierstrass Theorem* จะได้ว่า มี a เป็นจุดลิมิตของ A

ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $\{n : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์

เพราะฉะนั้น a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ข้อสังเกต 2.2.17 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ถ้า E เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ $\{a_n\}$ โดยที่ $E \neq \phi$ แล้ว E มีขอบเขต

พิสูจน์ : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ E เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ $\{a_n\}$ โดยที่ $E \neq \phi$ สมมติว่า E ไม่มีขอบเขต

ดังนั้น E ไม่เป็นสับเซตของ $[-r, r]$ สำหรับทุกช่วง $r > 0$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ดังนั้น จะมีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \leq M$

เพราะว่า E ไม่เป็นสับเซตของ $[-M, M]$ ดังนั้นมี a ซึ่ง $a \notin [-M, M]$

พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $a < -M$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|a+M|$ เห็นได้ชัดว่า $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นจุดลิมิตของ a

กรณีที่ 2 : $a > M$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

เพราะฉะนั้น E มีขอบเขต ■

ทฤษฎีบท 2.2.18 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต แล้ว E จะมีสมาชิกค่ามากสุดและสมาชิกค่าน้อยสุด

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ E เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ $\{a_n\}$ ให้ u เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ E และ l เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ E

ประการแรกจะแสดงว่า u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $u - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ E ดังนั้น มี $c \in E$ ซึ่ง

$$u-\frac{\varepsilon}{2} < c \le u < u+\frac{\varepsilon}{2}$$

เพราะว่า c เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น

$$N = \left\{n : a_n \in \left(c-\frac{\varepsilon}{2}, c+\frac{\varepsilon}{2} \right)\right\}$$

เป็นเซตอนันต์ และ ทุก $n \in N$ จะได้ว่า

$$u-\varepsilon < c-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < c+\frac{\varepsilon}{2} < u+\varepsilon$$

จึงสรุปได้ว่า u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $u \in E$ และ u เป็นสมาชิกค่ามากสุด E

ต่อไปจะแสดงว่า l เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $l+\frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ E ดังนั้น มี $c \in E$ ซึ่ง

$$l-\frac{\varepsilon}{2} < l \le c < l+\frac{\varepsilon}{2}$$

เพราะว่า c เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น

$$N = \left\{n : a_n \in \left(c-\frac{\varepsilon}{2}, c+\frac{\varepsilon}{2} \right)\right\}$$

เป็นเซตอนันต์ และ ทุก $n \in N$ จะได้ว่า

$$l-\varepsilon < c-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < c+\frac{\varepsilon}{2} < l+\varepsilon$$

จึงสรุปได้ว่า l เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $l \in E$ และ l เป็นสมาชิกค่าน้อยสุด E ■

บทนิยาม 2.2.19 : จะเรียกสมาชิกค่ามากสุดของ E และ สมาชิกค่าน้อยสุดของ E ในทฤษฎีบท 2.2.18 ว่า **ลิมิตบน *(upper limit)*** และ **ลิมิตล่าง *(lower limit)*** ของลำดับ $\{a_n\}$ และเขียนแทนโดย $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$ และ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2.2.20 : u เป็น ลิมิตบนของลำดับ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ u สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n : a_n \ge u+\varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

(2) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n : a_n > u-\varepsilon\}$ เป็นเซตอนันต์

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ u เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$

ประการแรกจะแสดงว่าข้อความ (1) เป็นจริง

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก u เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $u+\varepsilon$ ไม่เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$

จะได้ว่า ไม่มีจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ที่มีค่ามากกว่า $u+\varepsilon$
ดังนั้น $\{n: a_n \geq u+\varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด
เพราะฉะนั้น ข้อความ (1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่าข้อความ (2) เป็นจริง ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$
ดังนั้น $A=\{n: a_n \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์
จะได้ว่า $u-\varepsilon < a_n < u+\varepsilon$ สำหรับทุก $n \in A$
เพราะฉะนั้น ข้อความ (2) เป็นจริง

($\leftarrow$) กำหนดให้ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง
จะได้ว่า $A=\{n: a_n \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$
ดังนั้น u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

สมมติให้ u' เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่ง $u' > u$ และให้ α และ β เป็นจำนวน ซึ่ง

$$\beta > u' > \alpha > u$$

โดยข้อความ (1) จะได้ว่า $\{n: a_n \in (\alpha, \beta)\}$ เป็นเซตจำกัด
ดังนั้น u' ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
เพราะฉะนั้น u เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$ ■

ทฤษฎีบท 2.2.21 : l เป็นลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ l สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n: a_n < l-\varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

(2) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n: a_n < l+\varepsilon\}$ เป็นเซตอนันต์

พิสูจน์ : การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 2.2.20 ■

ตัวอย่าง 2.2.22 : จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุด ขอบเขตล่างค่ามากสุด ลิมิตบน และลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $a_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(2) $a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n} & \text{เมื่อ } n = 3m \\ \dfrac{n+2}{2n} & \text{เมื่อ } n = 3m+1 \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{เมื่อ } n = 3m+2 \end{cases}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม m

วิธีทำ : (1) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ คือ $\frac{3}{2}$ และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{a_n\}$ คือ -2 ในการหาลิมิตบนและลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ เราจะหาจุดลิมิตทั้งหมดของลำดับ $\{a_n\}$

ประการแรก จะแสดงว่า 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ และสรุปได้ว่า 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$-1-\varepsilon < -1-\frac{1}{n} < -1$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ และสรุปได้ว่า -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \neq 1$ หรือ $a \neq -1$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 1 : $a < -1$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|a+1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$-1-\frac{1}{n} > a+\varepsilon \qquad \text{หรือ} \qquad 1+\frac{1}{n} > a+\varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 2 : $a > 1$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$1+\frac{1}{n} < a-\varepsilon \qquad \text{หรือ} \qquad -1-\frac{1}{n} < a-\varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 3 : $-1 < a < 1$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2} min\{|a+1|, |a-1|\}$

เนื่องจาก $a_n < -1$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $a_n > 1$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก n และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้นสรุปได้ว่า ลิมิตบนของ $\{a_n\}$ คือ 1 และลิมิตล่างของ $\{a_n\}$ คือ -1

(2) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ คือ $\frac{4}{3}$ และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{a_n\}$ คือ 0 ในการหาลิมิตบนและลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ เราจะหาจุดลิมิตทั้งหมดของลำดับ $\{a_n\}$

ประการแรก จะแสดงว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n = 3m+2$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ และสรุปได้ว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{1}{2}$ เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n = 3m+1$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{N} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}$ เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n = 3m$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{N} < 1 + \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

เพราะฉะนั้น 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $a \neq \frac{1}{2}$ หรือ $a \neq 1$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 1 : $a < 0$

เลือก $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ พิจารณาช่วง $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = (\frac{3a}{2}, \frac{a}{2})$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เห็นได้ชัดว่า $a_n \notin (\frac{3a}{2}, \frac{a}{2})$ สำหรับทุก n และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 2 : $0 < a < \frac{1}{2}$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2} min \{ |a|, |a - \frac{1}{2}| \}$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n+1} < a - \varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} > a + \varepsilon$$

หรือ

$$1 + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} > a + \varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 3 : $\frac{1}{2} < a < 1$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2} min \{ |a - \frac{1}{2}|, |a - 1| \}$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < a - \varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < a - \varepsilon$$

หรือ

$$1 + \frac{1}{n} > 1 > a + \varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 4 : $a > 1$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2} | a - 1 |$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$1 + \frac{1}{n} < a - \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < a - \varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{n+1} < a - \varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า ลิมิตบนของ $\{a_n\}$ คือ 0 และ ลิมิตล่างของ $\{a_n\}$ คือ 1 ●

ในหัวข้อ 2.3 เราจะนำเสนอบทนิยามของลำดับลู่เข้าว่าเป็นลำดับมีขอบเขตที่มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียวซึ่งเป็นบทนิยามของ *Narayan* และในทฤษฎีบท 2.3.3 ได้แสดงการพิสูจน์ว่าบทนิยามของ *Narayan* สมมูลกับบทนิยามที่ทราบกันดี

2.3 ลำดับลู่เข้า (*Convergent Sequences*)

บทนิยาม 2.3.1 : เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้า *(convergent sequences)*** ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งมีขอบเขตและมีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว และจะเรียกจุดลิมิตนั้นว่า **ลิมิต*(limit)*** ของ $\{a_n\}$

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มี a เป็นลิมิต แล้วเรากล่าวว่า $\{a_n\}$ **ลู่เข้าสู่ *a*** (***converges to a***) และจะเขียนแทนโดย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

ถ้า $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า แล้วจะกล่าวว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่ออก *(divergent sequences)***

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับลู่เข้า

$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับลู่ออก

$\{(-1)^n\}$, $\{1+(-1)^n\}$, $\{n^2\}$

เห็นได้ชัดว่า $\{c\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ c

ทฤษฎีบท 2.3.3 : ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้อง $|a_n - a| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \ge N$

พิสูจน์ : $(\to)$ กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $A = \{n : a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตจำกัด

พิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $A = \phi$

ดังนั้น ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ จะได้ว่า $|a_n - a| < \varepsilon$

กรณีที่ 2 : $A \ne \phi$

ให้ m เป็นสมาชิกค่ามากสุดของ A และ $N = m+1$

พิจารณา ทุก $n \ge N$ จะได้ว่า $n \notin A$ ดังนั้น $|a_n - a| < \varepsilon$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - a| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ให้ $\varepsilon = 1$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่งสอดคล้องว่า $|a_n - a| < 1$ สำหรับทุก $n \geq k$

เลือก $M = max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k-1}|\}$

ดังนั้น $|a_n| \leq M$ ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และสรุปได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ประการสุดท้าย จะแสดงว่า $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว

จากกำหนดให้จะได้ว่า a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ สมมติ a' เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ เมื่อ $a' \neq a$

กรณีที่ 1 : ถ้า $a' > a$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{3}(a - a')$ จะได้ว่า $a' - \varepsilon = a + 2\varepsilon > a + \varepsilon$

เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น a เป็นลิมิตบนของลำดับ $\{a_n\}$

โดยทฤษฎีบท 2.2.20 (1) ดังนั้น $\{n : a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)\}$ เป็นเซตจำกัด

จะได้ว่า a' ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งของการเป็นจุดลิมิตของ a'

กรณีที่ 2 : ถ้า $a' < a$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - a'|$ จะได้ว่า $a' + \varepsilon = a - 2\varepsilon > a - \varepsilon$

เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น a เป็นลิมิตบนของลำดับ $\{a_n\}$

โดยทฤษฎีบท 2.2.21 (1) ดังนั้น $\{n : a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)\}$ เป็นเซตจำกัด

จะได้ว่า a' ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งของการเป็นจุดลิมิตของ a'

ดังนั้น a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ เพียงค่าเดียว

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

เงื่อนไขในทฤษฎีบท 2.3.3 เป็นเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้าของลำดับ $\{a_n\}$ คือ บทนิยามของการเป็นลำดับลู่เข้าซึ่งเป็นที่รู้จักกันดี และเราจะใช้บทนิยามนี้ในการตรวจสอบลำดับลู่เข้าดังตัวอย่าง 2.3.4 และตัวอย่าง 2.3.5

ตัวอย่าง 2.3.4 : จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ 0

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$

ดังนั้น $\frac{1}{N} < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3.3 สรุปได้ว่า ลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ●

ตัวอย่าง 2.3.5 : จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 3\right\}$ ลู่เข้าสู่ 3

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{6}{\varepsilon}$ สำหรับทุก $n \ge N$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 3 - 3\right| = \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} \le \frac{6}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3.3 สรุปได้ว่า ลำดับ $\left\{\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 3\right\}$ ลู่เข้าสู่ 3 ●

ตัวอย่าง 2.3.6 : จงแสดงว่าลำดับ $\left\{(-1)^n\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : สมมติ $\left\{(-1)^n\right\}$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริง a และให้ $\varepsilon = 1$
โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $\left|(-1)^n - a\right| < 1$ สำหรับทุก $n \ge N$

เนื่องจาก

$$1 - a \le |1 - a| = \left|(-1)^{2N} - a\right| < 1$$

ดังนั้น $a > 0$ และ

$$1 + a \le |1 + a| = \left|-(1 + a)\right| = |-1 - a| = \left|(-1)^{2N+1} - a\right| < 1$$

ดังนั้น $a < 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $\left\{(-1)^n\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก ●

เราจะจบบทนี้ด้วยเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้า นั่นคือเงื่อนไขในทฤษฎีบท 2.3.7

ทฤษฎีบท 2.3.7 : $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_m - a_n| < \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้นมีจำนวนจริง a ซึ่ง $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
ให้ $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $n \ge N$
พิจารณาจำนวนเต็ม $n \ge N$ และจำนวนเต็ม $m \ge N$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |a_m - a + a - a_n| \\
&\le |a_m - a| + |a_n - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_m - a_n| < \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ให้ $\varepsilon = 1$ จากกำหนดให้ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_m - a_n| < 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$ ให้ $N = m$ จะได้ว่า

$$|a_N - a_n| < 1 \quad \text{หรือ} \quad |a_n| < |a_N| + 1 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็ม}\, n \ge N$$

เลือก $M = max\,\{|a_N| + 1\,,\, |a_1|\,,\, |a_2|\,, \ldots,\, |a_{N-1}|\}$

ดังนั้น $|a_n| \le M$ ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว

โดยทฤษฎีบท 2.2.16 ได้ว่า $\{a_n\}$ มีจุดลิมิต

กำหนดให้ a' และ a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ โดยที่ $a' \ne a$ และให้ $\varepsilon > 0$

จากกำหนดให้ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_m - a_n| < \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$ โดยข้อสังเกต 2.2.14 จะมีจำนวนเต็ม $m_1 \ge N$ และจำนวนเต็ม $m_2 \ge N$ ซึ่ง

$$a_{m_1} \in \left(a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \text{และ} \quad a_{m_2} \in \left(a' - \frac{\varepsilon}{3}, a' + \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|a - a'| &= |a - a_{m_1} + a_{m_1} - a_{m_2} + a_{m_2} - a'| \\
&\le |a - a_{m_1}| + |a_{m_1} - a_{m_2}| + |a_{m_2} - a'| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

และสรุปได้ว่า $a = a'$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

บทที่ 3
ทฤษฎีบทของการลู่เข้าของลำดับ
(CONVERGENCE THEOREMS OF SEQUENCES)

ในบทนี้เราจะศึกษาทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการลู่เข้าของลำดับซึ่งใช้สำหรับการคำนวณลิมิตของลำดับหรือตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ นอกจากนี้จะศึกษาทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าของลำดับ โดยไม่กล่าวถึงลิมิตของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ และหลักการคอนแทรคชัน

3.1 ทฤษฎีบทพื้นฐานของการลู่เข้า (*Basic Theorems of Convergence*)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการลู่เข้าของลำดับซึ่งใช้สำหรับการคำนวณลิมิตของลำดับ หรือตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ และเรากล่าวถึง *Bernoulli's Inequality* ในทฤษฎีบทประกอบ 3.1.1 ที่จะใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.2 โดยละการพิสูจน์

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.1 : Bernoulli's Inequality

ถ้า $a \in \boldsymbol{R}$ และ $a > -1$ แล้ว $(1+a)^n \geq 1+na$ สำหรับทุก $\in \boldsymbol{I}^+$

ทฤษฎีบท 3.1.2 : ถ้า $c \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $|c| < 1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $c \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $|c| < 1$ และให้ $\varepsilon > 0$

พิจารณา $d = \dfrac{1}{|c|} - 1 > 0$ จะได้ว่า

$$|c| = \frac{1}{1+d}$$

เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq \dfrac{1}{d\varepsilon}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$|\ c^n - 0\ | = |\ c^n| = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+nd} < \frac{1}{nd} \leq \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.3 : ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon = 1$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{หรือ} \quad |a_n| - |a| \le |a_n - a| < 1$$

สำหรับทุก $n \ge N$ นั่นคือ

$$|a_n| \le 1 + |a| \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เลือก $M = max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, \ 1+|a|\right\}$

ดังนั้น ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ จะได้ว่า

$$|a_n| \le M$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ มีขอบเขต ■

ทฤษฎีบท 3.1.4 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \ne 0$ และลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a แล้ว จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ สำหรับทุก $n \ge N$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \ne 0$ และลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$

ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2} \quad \text{หรือ} \quad |a| - |a_n| \le \frac{|a|}{2}$$

สำหรับทุก $n \ge N$ นั่นคือ

$$|a_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 3.1.5 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

และ

$$|a_n - a - 0| = |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a - 0| = |a_n - a| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และจะได้ว่า

$$|a_n - a| = |a_n - a - 0| = |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.6 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

พิสูจน์ : ($\rightarrow$) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และจะได้ว่า

$$\big||a_n| - 0\big| = \big||a_n|\big| = |a_n| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\big||a_n| - 0\big| = |a_n| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และจะได้ว่า

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.7 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$

พิสูจน์ : ($\rightarrow$) ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a โดยทฤษฎีบท 3.1.5 ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$$

และดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.6 สรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$$

($\leftarrow$) พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้างบน

ดังนั้น การพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

ทฤษฎีบท 3.1.8 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \geq 0$ และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \geq 0$ และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $a = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - 0| = |a_n| = a_n < \varepsilon^2 \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}\right| = \left|\sqrt{a_n}\right| = \sqrt{a_n} < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

และสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

กรณีที่ 2 : $a \neq 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| = \sqrt{a}\,\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

และสำหรับทุก $n \geq N$ เราได้

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| &= \left|\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left[\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)/\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)\right]\right| \\ &= |a_n - a|/\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right) \\ &\leq |a_n - a|/\sqrt{a} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.9 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับโดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องว่า จะมี $M \in \boldsymbol{R}$ และ $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $|a_n - a| \leq M|b_n - b|$ สำหรับทุก $n \geq N_1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องว่า จะมี $M \in \boldsymbol{R}$ และ $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| \leq M|b_n - b|$$

สำหรับทุก $n \geq N_1$ เห็นได้ชัดว่า $M \geq 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ดังนั้น

มี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|b_n - b| = M\frac{\varepsilon}{M+1} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N_2$$

เลือก $N = max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$|a_n - a| \leq M|b_n - b| < M\frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ■

บทนิยาม 3.1.11 : กำหนดให้ $\{a_n\}$และ $\{b_n\}$เป็นลำดับ นิยาม **ผลบวก ผลคูณ และผลหาร** ของลำดับ $\{a_n\}$ และลำดับ $\{b_n\}$ ว่าคือ ลำดับ$\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ และ$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ เมื่อ $b_n \neq 0$ ทุก n ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 3.1.12 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{a_n\}$และ $\{b_n\}$เป็นลำดับ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ แล้ว

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b_n \neq 0$ ทุก n และ$b \neq 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{a_n\}$และ $\{b_n\}$เป็นลำดับ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

(1) ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ดังนั้น จะมี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N_1$$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ดังนั้น จะมี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N_2$$

เลือก $N = max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|(a_n+b_n)-(a+b)\right| = \left|(a_n-a)+(b_n-b)\right|$$
$$\leq \left|a_n-a\right|+\left|b_n-b\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = a+b$

(2) ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 $\{b_n\}$เป็นลำดับมีขอบเขต นั่นคือ จะมี $M>0$ ซึ่ง $|b_n|\leq M$ ทุก n และโดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|b_n-b\right| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \quad \text{สำหรับทุก } n\geq N_1$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ดังนั้น จะมี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|a_n-a\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{สำหรับทุก } n\geq N_2$$

เลือก $N=max\{N_1,N_2\}$ สำหรับทุก $n\geq N$ จะได้ว่า

$$\left|a_nb_n-ab\right| = \left|a_nb_n+b_na-b_na-ab\right|$$
$$= \left|b_n(a_n-a) + a(b_n-b)\right|$$
$$\leq \left|b_n\right|\left|a_n-a\right| + |a|\left|b_n-b\right|$$
$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + |a|\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = ab$

(3) กำหนดให้ $\varepsilon>0$ และ $b\neq 0$ ให้ $n\in\boldsymbol{I}^+$ และ $b_n\neq 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ โดยทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า มี $N_1\in\boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|b_n\right| > \frac{|b|}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n\geq N_1$$

และโดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมี $N_2\in I^+$ ซึ่ง

$$\left|b_n-b\right| < \frac{|b|^2}{4(|a|+1)}\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n\geq N_2$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ดังนั้น จะมี $N_3\in\boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|a_n-a\right| < \frac{|b|}{4}\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n\geq N_3$$

เลือก $N=max\{N_1,N_2,N_3\}$ สำหรับทุก $n\geq N$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{b(a_n-a) + a(b-b_n)}{bb_n}\right| \\
&\le \frac{|b|\,|a_n-a| + |a|\,|b_n-b|}{|b||b_n|} \\
&= \frac{|a_n-a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b|}\,\frac{|b_n-b|}{|b_n|} \\
&< \left(\frac{2}{|b|}\,\frac{|b|}{4}\varepsilon\right) + \left(\frac{|a|}{|b|}\,\frac{|b|^2\varepsilon}{4(|a|+1)}\,\frac{2}{|b|}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ ■

จากทฤษฎีบท 3.1.12 จะได้ข้อสังเกตต่อไปนี้

ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n$$

ทฤษฎีบท 3.1.13 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $\{a_n + b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก สมมติให้ $\{a_n + b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า $\{-a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้น $\{(a_n + b_n) + (-a_n)\}$ เป็นลำดับลู่เข้า หรือ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนด เพราะฉะนั้น $\{a_n + b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ■

ถ้า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้วเราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า หรือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก เนื่องจากมีตัวอย่างของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า และ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่ออก ซึ่งได้ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังจะแสดงในตัวอย่าง 3.1.14 และ 3.1.15

ตัวอย่าง 3.1.14 : ให้ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in I^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n^2\}$ ลู่เข้าสู่ 1

โดยทฤษฎีบท 3.1.12 และตัวอย่าง 2.3.4 สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ 1

เนื่องจาก

$$a_n^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

ดังนั้น

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ โดยทฤษฎีบท 3.1.12 และตัวอย่าง 2.3.4 สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 3.1.15 : ให้ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = (-1)^{2n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แต่ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = (-1)^{2n}$$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

เนื่องจาก

$$a_n^2 = (-1)^{2n} = 1 \qquad \text{สำหรับทุก } n$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 1$ เพราะฉะนั้น $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

เนื่องจาก

$$a_n^2 = (-1)^{2n}$$

ดังนั้น

$$a_n = (-1)^n \text{ สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และโดยตัวอย่าง 2.3.6 ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ●

ต่อไปนี้เป็นการหาลิมิตของลำดับโดยใช้ทฤษฎีบท 3.1.12

ตัวอย่าง 3.1.16 : จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

(1) $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{n} - 6$

(2) $a_n = \frac{3n^2+n}{5n^2+2n}$

(3) $a_n = r + r^2 + \ldots + r^n$ เมื่อ $r \in \boldsymbol{R}$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{n} - 6$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{n} - 6\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} 6 \\ &= -6\end{aligned}$$

(2) กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{3n^2+n}{5n^2+2n}$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{5n^2+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5+\left(2/n\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 5+\lim\limits_{n\to\infty}\left(2/n\right)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

(3) กำหนดให้ $r \in \boldsymbol{R}$ และสำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่งนิยาม $\{a_n\}$ ดังนี้

$$a_n = r+r^2+\ldots+r^n$$

เนื่องจาก

$$r+r^2+\ldots+r^n = r\left(r+r^2+\ldots+r^{n-1}\right) = r\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$= r\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$= \frac{r}{1-r}$$

●

ทฤษฎีบท 3.1.17 : The Convergence of Cesaro Averages

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งลู่เข้าสู่ a นิยามลำดับ $\{\sigma_n\}$ ดังนี้

$$\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = a$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งลู่เข้าสู่ a นิยามลำดับ $\{\sigma_n\}$ ดังนี้

$$\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

กำหนดให้ $b_n = a_n - a$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ โดยทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมีจำนวนเต็มบวก p ซึ่ง

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq p$$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ มีขอบเขต ดังนั้น มี $M > 0$ ซึ่ง

$$|b_n| \leq M \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และเลือกจำนวนเต็มบวก $k > \dfrac{2pM}{\varepsilon}$

ให้ $N = max\{p,k\}$ ดังนั้น สำหรับทุก $n \geq N$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right| &= \left|\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_p + b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_n}{n}\right| \\
&\leq \frac{|b_1 + b_2 + \ldots + b_p|}{n} + \frac{|b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_n|}{n} \\
&\leq \frac{|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_p|}{n} + \frac{|b_{p+1}| + |b_{p+2}| + \ldots + |b_n|}{n} \\
&< \frac{pM}{n} + \frac{(n-p)\varepsilon}{2n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{p\varepsilon}{2n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ และเพราะว่า

$$\begin{aligned}
\sigma_n - a &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n - na}{n} \\
&= \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \ldots + (a_n - a)}{n} \\
&= \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}
\end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = a$ ■

บทนิยาม 3.1.18 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามในอาณาเขตหนึ่งของ a และ l เป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า l เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a (*limit of* f *as* x *approaches* a)** และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $0 < |x - a| < \delta$

ในกรณีของบทนิยาม 3.1.22 เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **หาค่าได้ (*exist*)**

บทนิยาม 3.1.19 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ในบริเวณใกล้ ๆจำนวนจริง a และ l เป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า l เป็น**ลิมิตซ้ายของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย** (***limit of f as x approaches a from the left***) และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x)-l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $a-\delta < x < a$

และจะกล่าวว่า l เป็นลิมิตขวาของ **f** เมื่อ **x** เข้าใกล้ **a** ทางด้านขวา (***limit of f as x approaches a from the right***) และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x)-l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $a < x < a+\delta$

นอกจากนี้เรานิยาม $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N > 0$ สำหรับทุก $x > N$ แล้ว $|f(x)-l| < \varepsilon$

และ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$ ถ้า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N > 0$ สำหรับทุก $x < -N$ แล้ว $|f(x)-l| < \varepsilon$

บทนิยาม 3.1.20 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ **มีลิมิตเป็นบวกอนันต์ (*positively infinite limit*)** ถ้าสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี N สำหรับทุก $n \geq N$ แล้ว $a_n > M$ และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

และกล่าวว่า ลำดับ $\{a_n\}$ **มีลิมิตเป็นลบอนันต์ (*negatively infinite limit*)** ถ้าสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี N สำหรับทุก $n \geq N$ แล้ว $a_n < -M$ และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ทฤษฎีบท 3.1.21 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $[b,\infty)$ ซึ่ง $f(n) = a_n$ สำหรับทุกจำนวน $n \in I^+$ เมื่อ $n \geq b$ ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $[b,\infty)$ ซึ่ง

$$f(n) = a_n \qquad \text{เมื่อ } n \in \boldsymbol{I}^+ \text{ และ } n \geq b$$

ให้ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ กำหนด $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $M > 0$ ซึ่ง $|f(x)-l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x > M$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq b$ และ $N > M$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$|a_n - l| = |f(n)-l| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ l ■

บทนิยาม 3.1.22 : กำหนดให้ $D \subset \boldsymbol{R}$ และ $f : D \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ให้ $a \in D$ เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a (*continuous function at* a)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $|x-a| < \delta$

บทนิยาม 3.1.23 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ a (*continuous from the left at* a)** ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

และกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ a (*continuous from the right at* a)** ถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

บทนิยาม 3.1.24 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) (*continuous function on open interval* (a,b))** ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก $x \in (a,b)$

บทนิยาม 3.1.25 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ (*continuous function on closed interval* $[a,b]$)** ถ้า f สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) f ต่อเนื่องบน (a,b)

(2) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = a$

(3) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = b$

บทนิยาม 3.1.26 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า f มี**อนุพันธ์ที่ a (*differentiable at* a)** ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ หาค่าได้ และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์ของ f ที่ a (*derivative of* f *at* a)** ซึ่งจะเขียนแทนโดย $f'(a)$

บทนิยาม 3.1.27 : กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆเรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่**หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I (*differentiable on* I)** ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดในช่วง I

บทนิยาม 3.1.28 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ เรากล่าวว่า $\dfrac{f}{g}$ อยู่ใน**รูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ (*indeterminate form* $\frac{0}{0}$)**และเขียนแทนอย่างสั้น ๆ โดย $I.F. \frac{0}{0}$

บทนิยาม 3.1.29 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ เรากล่าวว่า $\frac{f}{g}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$ (*indeterminate form* $\frac{\infty}{\infty}$)และเขียนแทนอย่างสั้น ๆ โดย $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$

สำหรับในกรณีทั่วไปเราใช้ทฤษฎีของลิมิตในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน แต่สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันอยู่ในรูปแบบ $I.F.$ เราใช้กฎของโลปิตาล ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยละการพิสูจน์สำหรับผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [4]

ทฤษฎีบท 3.1.30 : กฎของโลปิตาล (*l'Hopital's Rule*)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (a,b)$ ถ้ามี $x_0 \in (a,b)$ ซึ่ง $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ และ $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ หรือมีค่าเท่ากับ $\pm\infty$ แล้ว $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

หมายเหตุ :

1) กฎของโลปิตาลยังใช้ได้กับเมื่อ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$
2) กฎของโลปิตาลสามารถขยายไปถึงกรณี ที่ $x \to \pm\infty$ และกรณีที่ $x \to a^-$ และ $x \to b^+$
3) สำหรับรูปแบบของลิมิตที่จัดว่าเป็นรูปแบบไม่กำหนดนอกจากรูปแบบ $I.F.\ \frac{0}{0}$ และ $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$ ยังมีอีกหลายรูปแบบซึ่งสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบ $I.F.\ \frac{0}{0}$ และ $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$ แล้วสามารถใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณหาค่าลิมิตได้เช่นเดียวกันซึ่งในที่นี้ไม่ได้กล่าวถึงสำหรับผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [4]

ตัวอย่าง 3.1.31 : จงหาลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $a_n = ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(2) $a_n = nr^n$ โดยที่ $0 < r < 1$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $f : [\frac{1}{2},\infty) \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \text{สำหรับทุก } x \in [\tfrac{1}{2},\infty)$$

จะได้ว่า

$$f(x)=x\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{ln\left(1+\left(1/x\right)\right)}{1/x}$$

กำหนดให้ $g(x)=ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ และ $h(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

ดังนั้น g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[\frac{1}{2},\infty)$ และหาอนุพันธ์ได้บน$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

ให้ $x\in[\frac{1}{2},\infty)$ จะได้ว่า

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=ln\,1=0$$

และ

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

จะได้ว่า $\frac{g}{h}$ อยู่ในรูป $I.F.\ \frac{0}{0}$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(1/x\right)}\right)=1$$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.21 สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

(2) กำหนดให้ $f:[\frac{1}{2},\infty)\to\boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน และ $0<r<1$ นิยาม f ดังนี้

$$f(x)=x\,r^x \quad \text{สำหรับทุก}\, x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} x=\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to\infty} r^x=0$$

แสดงว่าลิมิตอยู่ในรูป $I.F.\ 0\cdot\infty$ เราจึงเขียนนิพจน์ใหม่เพื่อหาค่าลิมิตดังนี้

$$f(x)=x\,r^x=\frac{x}{1/r^x}$$

กำหนดให้ $g(x)=x$ และ $h(x)=\frac{1}{r^x}$ เมื่อ $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

ดังนั้น g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[\frac{1}{2},\infty)$ และหาอนุพันธ์ได้บน $[\frac{1}{2},\infty)$

ให้ $x\in[1,\infty)$ จะได้ว่า

$$h'(x)=r^{-x}ln\ r\neq 0$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

และ

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{r^x}=\infty$$

จะได้ว่า $\frac{g}{h}$ อยู่ในรูป $I.F.\frac{\infty}{\infty}$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{r^{-x}lnr}=0$$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=0$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.21 สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ●

ทฤษฎีบท 3.1.32 : ให้ $D\subset \boldsymbol{R}$ และ $f:D\to\boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $a\in D$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับใน D ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$

พิสูจน์ : ให้ $f:D\to\boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a เมื่อ $a\in D$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับใน D ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a ดังนั้น จะมี $\delta>0$ ซึ่ง

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } |x-a|<\delta$$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ ดังนั้น จะมี $N\in\boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n-a|<\delta \qquad \text{สำหรับทุก } n\geq N$$

ดังนั้น สำหรับทุก $n\geq N$ เราได้

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$ ■

ตัวอย่าง 3.1.33 : จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ ต่อไปนี้

(1) $a_n = ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

(2) $a_n = sin\left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{2n+7}{n}\right)\right]$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$b_n = \frac{n^2+3}{n^2+1} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ $f : [1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = ln\ x \qquad \text{สำหรับทุก } x \in [1,\infty)$$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 โดยทฤษฎีบท 3.1.34 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)\right] = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) = ln\ 1 = 0$$

ดังนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ 0

(2) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = sin\left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{2n+7}{n}\right)\right] \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$b_n = \frac{2n+7}{n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ $f : \boldsymbol{R} \to [-1,1]$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = sin\ x \qquad \text{สำหรับทุก } x \in R$$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{7}{n}\right) = 2$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\frac{\pi}{4}$ โดยทฤษฎีบท 3.1.34 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot\frac{2n+7}{n}\right)\right] = f\left(\lim_{n\to\infty}\ \frac{2n+7}{n}\right) = sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ●

ในทฤษฎีบท 3.1.32 ไม่สามารถสรุปอะไรได้ ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจากมีตัวอย่างของ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ และ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ เมื่อ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังตัวอย่าง 3.1.34 และตัวอย่าง 3.1.35

ตัวอย่าง 3.1.34 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ} \quad x = 0 \\ 1 & \text{เมื่อ} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 0 และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ และ } f(a_n) = 1 \quad \text{ทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

แต่ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$ เพราะฉะนั้น

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

ตัวอย่าง 3.1.35 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ $f:(0,2] \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ} \quad 0 < x \leq 1 \\ x & \text{เมื่อ} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{และ} \quad f(a_n) = 0 \quad \text{ทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$ ●

ทฤษฎีบท 3.1.36 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq 0$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \geq 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq 0$ สมมติว่า $a < 0$ ให้ $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ ดังนั้น จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\left|a_n - a\right| < \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad -\frac{|a|}{2} < a_n - a < \frac{|a|}{2}$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และสามารถสรุปได้ว่า

$$\frac{3a}{2} < a_n < \frac{a}{2} < 0$$

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $a \geq 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.37 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \leq 0$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \leq 0$

พิสูจน์ : การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.1.36 ■

ทฤษฎีบท 3.1.38 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \geq b$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq b$ และให้ $b_n = a_n - b$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.36 ได้ว่า $a - b \geq 0$ ดังนั้น $a \geq b$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.39 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \leq b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \leq b$

พิสูจน์ : การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.38 ■

ทฤษฎีบท 3.1.40 : ให้ $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\},\{b_n\}$และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ ถ้า $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \le c \le b$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\},\{b_n\}$และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ และ $a_n \le c_n \le b_n$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c - a$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} c_n = b - c$$

เพราะว่า

$$a_n \le c_n$$

ดังนั้น

$$0 \le c_n - a_n$$

และ

$$c_n \le b_n$$

ดังนั้น

$$0 \le b_n - c_n$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.36 จะได้ว่า

$$0 \le c - a \quad \text{และ} \quad 0 \le b - c$$

หรือ

$$a \le c \quad \text{และ} \quad c \le b$$

ดังนั้น $a \le c \le b$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.41 : กำหนดให้ $a,b \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a < b$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ ถ้า $a \le c_n \le b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \le c \le b$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a,b \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a < b$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad \text{และ} \quad a \le c_n \le b$$

พิจารณา $a_n = a$ และ $b_n = b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ โดยทฤษฎีบท 3.1.40 จะได้ว่า $a \le c \le b$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.42 : The Squeezing Theorem

กำหนดให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $l \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง

$$a_n \le c_n \le b_n$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} b_n$$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น จะมี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N_1$$

และจะได้ว่า

$$l - \varepsilon < a_n$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ ดังนั้น จะมี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|b_n - l| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N_2$$

และจะได้ว่า

$$b_n < l + \varepsilon$$

เลือก $N = max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n \ge N$ เราได้ว่า

$$l - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < l + \varepsilon$$

ดังนั้น $|c_n - l| < \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ ■

ตัวอย่าง 3.1.43 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$ ประการแรกจะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ เนื่องจาก

$$0 \le a_n^2 \le a_n^2 + b_n^2$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

โดย *The Squeezing Theorem* จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.8 สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2} = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

และทฤษฎีบท 3.1.6 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ●

ตัวอย่าง 3.1.44 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \sqrt[n]{n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $n > 1$ ให้ $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n &= (1 + x_n)^n \\ &\geq 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \ldots + x^n \\ &\geq 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \end{aligned}$$

หรือ

$$0 < x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \qquad \text{สำหรับทุก } n > 1$$

ดังนั้น

$$x_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

เนื่องจาก

$$1 \le \sqrt[n]{n} = 1 + x_n \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\right)$$

โดย *The Squeezing Theorem* ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ●

ต่อไปในหัวข้อ 3.2 และหัวข้อ 3.3 เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าของลำดับ โดยไม่กล่าวถึงลิมิตของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ และหลักการคอนแทรคชัน

3.2 ลำดับโมโนโทน (*Monotone Sequences*)

บทนิยาม 3.2.1 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ

(1) **โมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น(*monotonically increasing*)** ถ้า $a_{n+1} \ge a_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(2) **โมโนโทนแบบลดลง(*monotonically decreasing*)** ถ้า $a_{n+1} \le a_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

และเราเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่า **ลำดับโมโนโทน (*monotone sequence*)** ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้นหรือลำดับโมโนโทนแบบลดลง

ตัวอย่าง 3.2.2 : จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ต่อไปนี้เป็นลำดับโมโนโทนหรือไม่

(1) $a_n = \frac{1}{n}$

(2) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(3) $a_n = (-1)^n$

(4) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

วิธีทำ : (1) เพราะว่า $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = a_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

(2) เนื่องจาก

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$
$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{n^n}$$
$$= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

และ

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}$$
$$= 1+1+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

เพราะว่า $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$

จะได้ว่า

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

ดังนั้น $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น

(3) เนื่องจาก มี $a_1=-1$ และ $a_2=1$ จะได้ว่า

$$a_1=-1<1=a_2$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

เนื่องจาก มี $a_2=1$ และ $a_3=-1$ จะได้ว่า

$$a_3=-1<1=a_2$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทน

(4) เนื่องจากสำหรับทุก $n\in \boldsymbol{I}^+$ เราได้

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

และ $\frac{1}{n+1} > 0$ ดังนั้น $a_n \le a_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ●

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้าของลำดับโมโนโทนซึ่งอาศัยสัจพจน์ความบริบูรณ์ (*The Completeness Axiom*) ดังจะกล่าวต่อไปนี้

สัจพจน์ความบริบูรณ์

ให้ $S \subset \boldsymbol{R}$ โดยที่ $S \ne \phi$ และ S มีขอบเขตบน แล้ว S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ให้ $S \subset \boldsymbol{R}$ โดยที่ $S \ne \phi$ และ S มีขอบเขตล่าง แล้ว S มีขอบเขตล่างค่ามากสุด

ทฤษฎีบท 3.2.3 : การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน(*The Monotone Convergence Theorem*)

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

($\rightarrow$) $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.1.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณี 1 : $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\{a_n\}$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด ให้ u เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $u-\varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ นั่นคือ มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$a_N > u-\varepsilon$$

ดังนั้น

$$a_n > u-\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เพราะฉะนั้น

$$u-\varepsilon < a_n \le u < u+\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

หรือ

$$|a_n - u| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = u$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

กรณี 2 : $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตล่าง โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\{a_n\}$ มีขอบเขตล่างค่ามากสุด ให้ l เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $l+\varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ นั่นคือ มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $a_N < l+\varepsilon$ ดังนั้น

$$a_n < l+\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น

$$l-\varepsilon < l \leq a_n < l+\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก} n \geq N$$

หรือ

$$|a_n - l| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก} n \geq N$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีสิ้นสุด ■

ตัวอย่าง 3.2.4 : ลำดับ $\{a_n\}$ในตัวอย่าง 3.2.2(2) เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังตัวอย่าง 3.2.2(2) จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น และในตัวอย่าง 2.2.5(1) เราได้แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ซึ่ง

$$\begin{aligned}|a_n| &\leq 2+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}\right]\\ &\leq 2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &\leq 2+1 = 3\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$2 < a_n \leq 3$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

จะเขียนแทนค่าลิมิตของ $\{a_n\}$ ในตัวอย่าง 3.2.4 ด้วย e และจะเห็นว่า $2 < e \leq 3$ และเราสามารถประมาณค่าของ e ได้ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษาจากบทที่ 8 ของ [2] ซึ่งได้ค่าประมาณของ e เท่ากับ 2.7182

ตัวอย่าง 3.2.5 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

วิธีทำ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\left(\frac{2n+1}{2n+2}-1\right) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2n+2}-1\right)a_n < 0 \end{aligned}$$

และ $$0 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \leq 1 \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลงซึ่งมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 3.2.6 : ลำดับ $\{a_n\}$ในตัวอย่าง 3.2.2(4) เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังตัวอย่าง 3.2.2(4) และในตัวอย่าง 2.2.5(2) เราได้แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ●

ตัวอย่าง 3.2.7 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ซึ่งไม่มีขอบเขตบน จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ซึ่งไม่มีขอบเขตบน ให้ $M>0$ เนื่องจาก M ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $N \in I^+$ ซึ่ง $a_N > M$ แต่ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ดังนั้น

$$a_n > M \text{ สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ●

บทนิยาม 3.2.8 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n_1 < n_2 < \ldots$ นิยามลำดับ $\{b_k\}$ ดังนี้

$$b_k = a_{n_k} \quad \text{สำหรับทุก } k \in \boldsymbol{I}^+$$

แล้ว เราเรียก $\{b_k\}$ ว่า**ลำดับย่อย (*subsequence*)** ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่างเช่น $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\ldots$ เป็นลำดับย่อยลำดับหนึ่งของลำดับ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$ โดยมี $n_k = 2k-1$ สำหรับทุก $k \in \boldsymbol{I}^+$

บทนิยาม 3.2.9 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ $m \in \boldsymbol{I}^+$ เรากล่าวว่า m เป็น ***peak index*** ของ $\{a_n\}$ ถ้า $a_n \le a_m$ สำหรับทุก $n \ge m$

ตัวอย่างเช่น $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$ ทุกจำนวน $m \in \boldsymbol{I}^+$ เป็น *peak index*

$1,-1,2,-1,3,\ldots$ ไม่มี *peak index*

$1,-1,1,-1,\ldots$ ทุกจำนวนเต็มบวกคี่เป็น *peak index*

ทฤษฎีบท 3.2.10 : ทุกลำดับจะมีลำดับย่อยซึ่งเป็นลำดับโมโนโทน

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ พิจารณาตามจำนวน *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนี้

กรณี 1 : $\{a_n\}$ ไม่มี *peak index*

เนื่องจาก 1 ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_1 > 1$ ซึ่ง $a_{n_1} > a_1$

เนื่องจาก n_1 ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_2 > n_1$ ซึ่ง $a_{n_2} > a_{n_1}$

ในทำนองเดียวกัน จะมี $n_3 > n_2$ ซึ่ง $a_{n_3} > a_{n_2}$

$\vdots$

ดังนั้น $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \ldots < a_{n_k}$

นั่นคือ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้นของ $\{a_n\}$

เพราะฉะนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทน

กรณี 2 : $\{a_n\}$ มี *peak index* จำนวนจำกัด

ให้ N เป็น *peak index* ที่มีค่ามากสุด

เนื่องจาก $N+1$ ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_1 > N+1$ ซึ่ง $a_{n_1} > a_{N+1}$

เนื่องจาก n_1 ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_2 > n_1$ ซึ่ง $a_{n_2} > a_{n_1}$

ในทำนองเดียวกัน จะมี $n_3 > n_2$ ซึ่ง $a_{n_3} > a_{n_2}$

$\vdots$

ดังนั้น $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \ldots < a_{n_k}$

นั่นคือ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้นของ $\{a_n\}$

เพราะฉะนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทน

กรณี 3 : $\{a_n\}$ มี *peak index* จำนวนอนันต์

ให้ $P=\{\, m \mid m$ เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}\,\}$ จะได้ว่า P เป็นเซตอนันต์ และ $P \subset \boldsymbol{I}^+$

ให้ n_1 เป็น *peak index* ที่มีค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $a_{n_1} \ge a_{n_2}$ เมื่อ $n_2 \ge n_1$

ในทำนองเดียวกัน $a_{n_2} \ge a_{n_3}$ เมื่อ $n_3 \ge n_2$

$\vdots$

จะได้ว่า $a_{n_1} \ge a_{n_2} \ge a_{n_3} \ge \ldots \ge a_{n_k}$

นั่นคือ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนแบบลดลงของ $\{a_n\}$

เพราะฉะนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทน ■

ทฤษฎีบท 3.2.11 : ลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 3.2.10 จะได้ว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนของ $\{a_n\}$

ดังนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

ทฤษฎีบท 3.2.12 : The Bolzano–Weierstrass Theorem

ให้ a และ b เป็นจำนวนซึ่ง $a<b$ ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \in [a,b]$ ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อย $\{a_{n_k}\}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ $x \in [a,b]$

พิสูจน์ : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนซึ่ง $a<b$ ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \in [a,b]$ แล้วได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 3.2.11 จะมีลำดับ $\{a_{n_k}\}$ ซึ่งเป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ และ $\{a_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ x โดยทฤษฎีบท 3.1.41 สรุปได้ว่า $x \in [a,b]$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.13 : ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a แล้ว ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a และ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|a_n - a\right| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เนื่องจาก $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นลำดับเพิ่มขึ้น จะได้ว่า

$$n_j \geq j \quad \text{สำหรับทุก } j \in \boldsymbol{I}^+$$

ดังนั้น

$$\left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } k \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$ ■

จากทฤษฎีบท 3.2.12 สรุปได้ว่า ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

ตัวอย่าง 3.2.14 : ให้ $c < 0$ และ $a_1 > 0$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนที่ลู่เข้าสู่ α เมื่อ $a_1 > 0$ และ α เป็นรากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $x^2 - x - c = 0$ เมื่อ $x > 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $c < 0$ และ $a_1 > 0$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

ให้ $x > 0$ และ $x^2 - x - c = 0$ เป็นสมการกำลังสอง ดังนั้น $x^2 - x - c = 0$ มีรากของสมการ 2 รากโดยที่รากหนึ่งเป็นจำนวนจริงบวก และอีกรากหนึ่งเป็นจำนวนจริงลบ ให้ α และ β เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง α และ $-\beta$ เป็นรากของสมการ $x^2 - x - c = 0$ เนื่องจาก

$$\alpha - \beta = 1 \quad \text{และ} \quad \alpha(-\beta) = -c$$

ดังนั้น

$$x^2 - x - c = (x - \alpha)(x + \beta)$$

พิจารณา

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = c + a_n - a_n^2 = (c + a_n) - (c + a_{n-1}) = a_n - a_{n-1}$$

ถ้า $a_n > a_{n-1}$ จะได้ว่า

$$a_{n+1} > a_n$$

และถ้า $a_n < a_{n-1}$ จะได้ว่า

$$a_{n+1} < a_n$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ α โดยแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี ตามค่าของ a_1 ดังนี้

กรณีที่ 1 : $a_1 > \alpha$

เนื่องจาก

$$x^2 - x - c = (x-\alpha)(x+\beta)$$

ดังนั้น

$$a_1^2 - a_1 - c = (a_1-\alpha)(a_1+\beta)$$

และสรุปว่า

$$a_1^2 - a_1 - c > 0 \quad \text{หรือ} \quad a_2 = \sqrt{c+a_1} < a_1$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

เนื่องจาก

$$a_n^2 = c + a_{n-1} > c + a_n$$

ดังนั้น

$$a_n^2 - a_n - c > 0$$

จะได้ว่า $a_n > \alpha$ สำหรับทุก n ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลงซึ่งมีขอบเขตล่าง โดยทฤษฎีบท 3.2.3 สรุปได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

กำหนดให้ $a \in R$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ จะได้ว่า $a \geq \alpha$ เนื่องจาก

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c+a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(c+a_n)} = \sqrt{c+a}$$

ดังนั้น

$$a^2 = c + a \qquad \text{หรือ} \qquad a^2 - a - c = 0$$

เพราะฉะนั้น $a = \alpha$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - x - c = 0$ และสรุปว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

กรณีที่ 2 : $a_1 < \alpha$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 : $a_1 = \alpha$

ดังนั้น $a_n = \alpha$ สำหรับทุก n เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ α และ α เป็นรากของสมการ $x^2 - x - c = 0$ ดังนั้นการพิสูจน์สมบูรณ์ ●

ตัวอย่าง 3.2.15 : กำหนดให้ $a_1 = \sqrt{2}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนที่ลู่เข้า พร้อมทั้งหาลิมิตของ $\{a_n\}$

วิธีทำ : กำหนดให้ $a_1 = \sqrt{2}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$a_n < 2$$

ประการแรกเราจะแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(i) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ และ } \sqrt{2} < 2$$

ดังนั้น $a_1 < 2$

(ii) ให้ $k \in \boldsymbol{I}^+$ และ $P(k)$ จริง นั่นคือ $a_k < 2$ เราได้

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} < 2$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $a_n < 2$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ดังนั้น $0 < a_n < 2$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

เนื่องจาก

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

เมื่อยกกำลังสองเราได้

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n$$

หรือ

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = (1 + a_n)(2 - a_n)$$

เพราะว่า $0 < a_n < 2$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ดังนั้น

$$(1 + a_n)(2 - a_n) > 0$$

นั่นคือ $a_{n+1}^2 < a_n^2$ และสรุปได้ว่า

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนซึ่งมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 3.2.3 และ ทฤษฎีบท 3.1.36 $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $a \geq 0$

ประการสุดท้ายจะแสดงการหาลิมิตของ $\{a_n\}$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n}$$

ดังนั้น

$$a = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(2+a_n\right)} = \sqrt{2+a}$$

จะได้ว่า

$$a^2 = 2+a \quad \text{หรือ} \quad a^2 - a - 2 = 0$$

ดังนั้น

$$a = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = 2,-1$$

เพราะฉะนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ 2 ●

3.3 การลู่เข้าของลำดับโคชี (*Convergence of Cauchy Sequence*)

บทนิยาม 3.3.1 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับโคชี *(Cauchy Sequence)*** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $|a_n - a_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $m \geq N$ และ $n \geq N$

ทฤษฎีบท 3.3.2 : ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ : ให้ $a \in R$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

พิจารณาจำนวนเต็ม $m \geq N$ และ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 3.3.3 : ลำดับโคชีเป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } m \geq N \text{ และ } n \geq N$$

กำหนดให้ $N = m$ จะได้ว่า

$$\left| a_n - a_N \right| < 1 \quad \text{สำหรับทุก } m \geq N \text{ และ } n \geq N$$

เลือก $M = max\{|a_N|+1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$

ดังนั้น

$$|a_n| < M \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้าของลำดับโคชี

ทฤษฎีบท 3.3.4 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ (*The Cauchy Convergence Criterion for Sequences*)

$\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ โดยทฤษฎีบท 3.3.2 ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี โดยทฤษฎีบท 3.3.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดย *Bolzano-Weierstrass Theorem* จะได้ว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ a

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก $m \geq N$ และ $n \geq N$ เพราะว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a ดังนั้น จะมี $K \in I^+$ ซึ่ง

$$\left|a_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก $k \geq K$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|\left(a_n - a_{n_k}\right) + \left(a_{n_k} - a\right)\right| \\ &\leq \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - a\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

ทฤษฎีบท 3.3.5 : หลักการคอนแทรคชัน (*The Contraction Principle*)

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ถ้า มี $r \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $0 < r < 1$ และ $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq r|a_{n+1} - a_n|$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และมี $r \in (0,1)$ ซึ่ง

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \le r|a_{n+1} - a_n| \qquad (*)$$

สำหรับทุก $n,m \in \boldsymbol{I}^+$ และ $n \ge m$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

และโดยการใช้ $(*)$ ซ้ำแล้วซ้ำอีก จะได้

$$|a_{k+1} - a_k| \le r|a_k - a_{k-1}| \le r^2|a_{k-1} - a_{k-2}| \le \cdots \le r^{k-1}|a_2 - a_1|$$

ดังนั้น

$$|a_n - a_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\right| \le \sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \le \sum_{k=m}^{n-1} r^{k-1}|a_2 - a_1|$$

และ

$$\sum_{k=m}^{n-1} r^{k-1}|a_2 - a_1| = r^{m-1}|a_2 - a_1|\sum_{k=0}^{n-m-1} r^{k-1} = |a_2 - a_1| r^{m-1}\frac{1 - r^{n-m}}{1 - r} < |a_2 - a_1| r^{m-1}\frac{1}{1 - r}$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ เราได้ว่า มี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$r^m < \frac{\varepsilon(1 - r)}{|a_2 - a_1|}$$

สำหรับทุก $m \ge N_1$ ให้ $N = N_1 + 1$ สำหรับ $n \ge N$ $m \ge N$ และ $n \ge m$ เราได้

$$|a_n - a_m| < |a_2 - a_1| r^{m-1}\frac{1}{1 - r} < \frac{|a_2 - a_1|}{1 - r}\frac{\varepsilon(1 - r)}{|a_2 - a_1|} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี โดยทฤษฎีบท 3.34 $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ■

ตัวอย่าง 3.3.6 : จงแสดงว่าลำดับที่กำหนดต่อไปนี้ลู่เข้า และหาลิมิตของลำดับ

(1) $a_1 = 1$ และ $a_n = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{4}$

(2) $a_1 = \sqrt{2}$ และ $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_1 = 1 \quad \text{และ} \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{4} \qquad \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

เนื่องจาก

$$\left| a_{n+2} - a_{n+1} \right| = \left| 1 + \frac{a_{n+1}}{4} - 1 - \frac{a_n}{4} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \left| a_{n+1} - a_n \right|$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่จำนวนจริง a เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{4} \right)$$

ดังนั้น

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{4} \right) = 1 + \frac{a}{4}$$

จะได้ว่า

$$a = 1 + \frac{a}{4} \quad \text{หรือ} \quad a = \frac{4}{3}$$

เพราะฉะนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ $\frac{4}{3}$

(2) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \ \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

ประการแรกจะแสดงว่า $a_n \geq \sqrt{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

เราจะแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(i) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

ดังนั้น $a_1 \geq \sqrt{2}$

(ii) ให้ $k \in \boldsymbol{I}^+$ และ $P(k)$ จริง นั่นคือ $a_k \geq \sqrt{2}$ เราได้

$$a_{k+1} = \sqrt{2a_k} \geq \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็น และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $a_n \geq \sqrt{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า เนื่องจาก

$$\left| a_{n+2} - a_{n+1} \right| = \left| \sqrt{2a_{n+1}} - \sqrt{2a_n} \right|$$

$$= \left| \left(\sqrt{2a_{n+1}} - \sqrt{2a_n} \right) \cdot \left[\left(\sqrt{2a_{n+1}} - \sqrt{2a_n} \right) / \left(\sqrt{2a_{n+1}} + \sqrt{2a_n} \right) \right] \right|$$

$$= \left| \; 2(a_{n+1} - a_n) / \sqrt{2}\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}\right) \right|$$
$$= \left| 2(a_{n+1} - a_n) / \sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{2a_n}} + \sqrt{a_n}\right) \right|$$
$$\leq \left| 2(a_{n+1} - a_n) / \sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2}}} + \sqrt{a_n}\right) \right|$$
$$< \frac{1}{2} \left| a_{n+1} - a_n \right|$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ประการสุดท้าย จะแสดงการหาลิมิตของ $\{a_n\}$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่จำนวนจริง a เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n}$$

ดังนั้น

$$a = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2a}$$

จะได้ว่า

$$a^2 - 2a = 0 \quad \text{หรือ} \quad a(a-2) = 0$$

ดังนั้น

$$a = 0 \quad \text{หรือ} \quad a = 2$$

เพราะว่า $a_n \geq \sqrt{2}$ ดังนั้น $a = 2$ เพราะฉะนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ 2 ●

เราจะจบสารนิพนธ์นี้โดยการให้นิยามของอนุกรมของลำดับของจำนวนจริงซึ่งนิยามมาจากลำดับของจำนวนจริง ดังนั้นการศึกษาอนุกรมของจำนวนจริงจึงนำผลที่ได้ศึกษาไว้แล้วสำหรับลำดับมาใช้ได้ทั้งหมด

3.4 อนุกรมของจำนวนจริง (*Series of Real Numbers*)

บทนิยาม 3.4.1 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ เราจะเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมของจำนวนจริง (*series of real numbers*)** และเขียนแทนอนุกรมโดย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ เรียก a_n ว่า **เทอมที่ n (n^{th} *term*)** ของอนุกรม และเรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อยที่ n (n^{th} *partial sum*)** ของอนุกรม

บทนิยาม 3.4.2 : ให้ $\{S_n\}$เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เรากล่าวว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้า (*convergent series*)** ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ถ้า $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ s เราเรียก s ว่า**ผลบวก (*sum*)** ของอนุกรม และเขียนแทนโดย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก เรากล่าวว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่ออก *(divergent series)***

ตัวอย่าง 3.4.3 : จงแสดงว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $n \in I^+$ และ $\{S_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

เราจะแสดงว่า $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ 2 ให้ $\varepsilon > 0$

เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|S_n - s| &= \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - 2\right| \\
&= \left|2 - \frac{1}{2^n} - 2\right| \\
&= \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ 2 และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ ●

ตัวอย่าง 3.4.4 : จงหาผลบวกของ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

วิธีทำ : เนื่องจาก

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

จะได้ว่า

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

ดังนั้น

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+(1/n)}\\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

ตัวอย่าง 3.4.5 : จงแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต *(geometric series)* $a+ar+ar^2+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $|r|<1$ และมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$

พิสูจน์ : เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
S_n &= a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}\\
&= a\left(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}\right)\\
&= \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}\\
&= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n\\
&= \frac{a}{1-r}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.6 : จงตรวจสอบว่าอนุกรม $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจากอนุกรม $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a=1$ และ

$r = -\frac{1}{3}$ ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{1-\left(-1/3\right)} = \frac{3}{4}$$ ●

ตัวอย่าง 3.4.7 : จงแสดงว่าอนุกรมฮาร์โมนิก (*harmonic series*)

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : เนื่องจาก

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

เป็นลำดับซึ่งนิยามดังตัวอย่าง 3.2.2(4) ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน แต่ในตัวอย่าง 2.2.5(2) ได้แสดงแล้วว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต และโดยทฤษฎีบท 3.2.3 สรุปได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ดังนั้น $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 3.4.8 : ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า พิจารณา $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = a_n$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

ถ้าลิมิตของแต่ละเทอมทางขวาหาค่าได้ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.4.8 มีประโยชน์ในการตรวจสอบว่าอนุกรมเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ ดังจะเห็นได้จากการแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิตลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$

ถ้า $a_n = ar^n$ แล้ว $\left|ar^{n+1}\right| = \left|ar^n\right||r| \geq \left|ar^n\right| \geq |a| > 0$ สำหรับทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$ เนื่องจาก $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $a + ar + ar^2 + \ldots$ ลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$

บทกลับของทฤษฎีบท 3.1.20ไม่จริง นั่นคือเราแสดงได้ว่ามีอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แต่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออกดังตัวอย่างต่อไปนี้

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

เนื่องจาก $S_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

เมื่อกำหนด $M>0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $n>M^2$ ดังนั้น $S_n>M$ และสรุปได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บรรณานุกรม

[1] Belding, F.D. and Mitchell, J.K., **Foundations of Analysis** , Prentice-Hall, Inc., 1991.

[2] Fitzpatrick, M.P., **Advanced Calculus**, PWS Publishing Company , 1996.

[3] Narayan, S., **Mathematical Analysis**, S.Chand&Co.Ltd, 10th ed., 1971.

[4] Olmsted, M.H.J., **Advanced Calculus**, New York : Appletion-Century-Crofts, 1961.

[5] วารี เกรอต **แคลคูลัส** สำนักพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด 2539

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล นางดรรชนี กิจสมัคร

ที่อยู่ 29 หมู่ 8 ตำบลลำพยา อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม 73000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2542 สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม

พ.ศ. 2546 ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2542-2544 ครูผู้สอนและหัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนกุหลาบวัฒนา เขตสัมพันธวงศ์ กรุงเทพฯ

พ.ศ. 2544-2546 ครูผู้สอนและหัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น-ตอนปลาย โรงเรียนบอสโกพิทักษ์ ตำบลโพรงมะเดื่อ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม