การประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อน

โดย

นางสาวรังสิมา ถิรจันทรา

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2549

ISBN 974-11-6268-5

APPLICATIONS OF COMPLEX NUMBERS

By

Rungsima Thirajantra

A Master 's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2006

ISBM 974-11-6268-5

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง “การประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อน” เสนอโดย นางสาวรังสิมา ถิรจันทรา เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....

(รองศาสตราจารย์ ดร. ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่...............เดือน................พ.ศ.............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

.... /..................... / ....

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

.... /..................... / ....

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

.... /..................... / ....

K 46308308 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : จำนวนเชิงซ้อน , ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ , ทฤษฎีบททวินาม , รากปฐมฐาน

รังสิมา ถิรจันทรา : การประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อน (APPLICATIONS OF COMPLEX NUMBERS) อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ.ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. 60 หน้า. ISBN 974-11-6268-5

เราได้ศึกษานิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน เช่นรูปแบบเชิงขั้ว ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ มาแล้วในวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานระดับชั้นมัธยมและระดับปริญญาตรี เพราะเกาส์ได้แนะนำจำนวนเชิงซ้อน ให้เป็นจุดในระนาบ เซตของจำนวนเชิงซ้อนจึงอาจแทนได้ด้วยกราฟ ยิ่งกว่านั้นการคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว ยังหมายถึงการแปลงหรือการเปลี่ยนแกนพิกัดฉาก ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ เราได้นำความหมายเหล่านี้มาแสดงให้เห็นประโยชน์ของจำนวนเชิงซ้อนด้วยการประยุกต์ แก้โจทย์ปัญหาในระนาบ เช่นปัญหาเรขาคณิตในระนาบ การหาสูตรตรีโกณมิติ นอกจากนี้ยังแสดงการประยุกต์ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ร่วมกับทฤษฎีบททวินามเพื่อหาผลบวก ทวินามและอื่น ๆ

เพราะจำนวนเชิงซ้อนกำเนิดมาจากการที่นักคณิตศาสตร์ต้องการหาเซตคำตอบของ ทุก ๆ พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เราจึงแสดงสูตรการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งรากที่ n ของ 1 ซึ่งเราเรียกว่ารากปฐมฐาน สามารถนำมาประยุกต์ในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตและตรีโกณมิติ ลดความยุ่งยากซับซ้อนของโจทย์ลง ทำให้การแก้ปัญหาง่ายขึ้น และสุดท้ายเราแสดงการประยุกต์ในปัญหาพหุนามพร้อมทั้งแสดงตัวอย่างอื่น ๆ ที่น่าสนใจ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2549
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์...

K 46308308 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORDS : COMPLEX NUMBER, DE MOIRRE'S THEOREM, BINOMIAL THEOREM, PRIMITIVE ROOT

RUNGSIMA THIRAJANTRA : APPLICATIONS OF COMPLEX NUMBERS. MASTER 'S REPORT ADVISOR : ASSOC. PROF. CHAWEWAN RATANAPRASERT, Ph.D.
60 pp. ISBN 974-11-6268-5

We have already studied the definitions and basic theorems of complex numbers in the foundation courses of mathematics at high school and Bachelor degree such as polar form of a complex number and de Moivre 's Theorem. Because of the meaning of a complex number which was suggested by Gauss to be a point on a plane, a set of complex numbers may be represented by graph. Moreover, the multiplication of complex numbers in polar form means a translation of the axes. In the project, we take these meanings to identify the useful of complex numbers by solving problems relative to plane; for instance, plane geometry and trigonometric formulae. In addition, we apply de Moivre 's Theorem with Binomial Theorem to give formulae of summations .

The construction of complex numbers due to the problem of finding sets of roots of polynomials whose coefficients are real numbers, we show the formula of the $n^{\underline{th}}$ root of a complex number. In particular, the $n^{\underline{th}}$ root of 1 which are called "roots of unity" can be applied to solve many problems in geometry and trigonometric in order to reduce the complexity of problems. Finally, we show the application in polynomial problems and other interesting problems.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2006

Student's signature ……………………………………………………………………………………

Master's Report Advisor's signature……………………………………………………………………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงเป็นอย่างดี ก็ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่าง ๆ ช่วยให้กำลังใจ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่อง จนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ในระดับปริญญาโท จนทำให้ศิษย์คนนี้ประสบความสำเร็จด้วยดี

ขอขอบคุณรุ่นพี่และเพื่อน ๆ ในภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่คอยช่วยเหลือ ให้คำแนะนำในเรื่องต่าง ๆ

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ พ่อ แม่ ป้า น้า ที่คอยเคี่ยวเข็ญ และสนับสนุนการศึกษาและคอยเป็นกำลังใจจนทำให้ลูก(หลาน) มีวันนี้ได้

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ
(INTRODUCTION)

เราได้ศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อนมาแล้ว ในระดับชั้นมัธยมและปริญญาตรี เช่นรูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนและทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์เป็นต้น ในสารนิพนธ์ฉบับนี้เราศึกษา การประยุกต์สมบัติเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน กับปัญหาที่ยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้น การประยุกต์ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ร่วมกับทฤษฎีบททวินาม ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และเอกลักษณ์ต่าง ๆ ที่ยุ่งยากและการประยุกต์รากปฐมฐาน ในการแสดงการประยุกต์เราเสนอด้วยตัวอย่างที่น่าสนใจ โดยเริ่มแรกเราจะกล่าวถึงโครงสร้างทางพีชคณิตของเซตของจำนวนจริงทั้งหมด R และผลคูณ $R \times R$ เพื่อนำทางสู่การให้บทนิยามจำนวนเชิงซ้อนและศึกษาทฤษฎีบทเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน รูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนและทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาการประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไป พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างที่น่าสนใจประกอบความเข้าใจ

ต่อมาเราจะศึกษาการประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อน โดยกล่าวถึงการประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อนกับเรื่องต่าง ๆ ซึ่งในสารนิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งออกเป็น 4 ประเภทด้วยกันคือ (1) การประยุกต์สมบัติเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน โดยกล่าวถึงทฤษฎีบทพร้อมบทพิสูจน์ (2) การประยุกต์เพื่อหาผลบวกในรูปสัมประสิทธิ์ทวินามและตรีโกณมิติ โดยกล่าวถึงทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) และแสดงการประยุกต์ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ร่วมกับทฤษฎีบททวินามในการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ (3) การประยุกต์ในฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ที่ยุ่งยากมากขึ้น และ (4) การประยุกต์กับพหุนาม เราศึกษาการประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จากตัวอย่างที่น่าสนใจ

นอกจากนี้เรายังกล่าวถึงรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน รากปฐมฐาน และการประยุกต์รากปฐมฐาน พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างที่น่าสนใจซึ่งได้รวบรวมมาจากหนังสือต่าง ๆ และนำมาเสนอในสารนิพนธ์ฉบับนี้อย่างหลากหลายเพื่อให้เห็นถึงการประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อนที่สามารถนำไปใช้ได้อย่างกว้างขวาง

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งเนื้อหาแต่ละบทดังนี้

บทที่ 2 : กล่าวถึงโครงสร้างทางพีชคณิตของเซตของจำนวนจริง R และผลคูณ $R \times R$ บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาการประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อน รูปโพล่าร์ของจำนวนเชิงซ้อนและทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

บทที่ 3 : ศึกษาการประยุกต์สมบัติเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อหาผลบวกสัมประสิทธิ์ทวินาม การประยุกต์กับตรีโกณมิติ และการประยุกต์กับพหุนาม พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างที่น่าสนใจ

บทที่ 4 : ศึกษาการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน รากปฐมฐาน ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรากปฐมฐาน และการประยุกต์รากปฐมฐาน ในการแก้โจทย์ปัญหาด้วยตัวอย่างที่น่าสนใจ

บทที่ 2
จำนวนเชิงซ้อน
(Complex Number)

ในบทนี้เราจะศึกษาโครงสร้างทางพีชคณิตของจำนวนจริง R และผลคูณ $R \times R$ เพื่อเป็นแนวทางของการให้บทนิยามของจำนวนเชิงซ้อน ต่อจากนั้นจึงให้บทนิยามของจำนวนเชิงซ้อน ศึกษาสมบัติพื้นฐานและทฤษฎีบทของจำนวนเชิงซ้อนบางประการรวมถึงรูปโพล่าร์ของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาการประยุกต์จำนวนเชิงซ้อนที่จะกล่าวถึงในบทต่อ ๆ ไป

ตลอดสารนิพนธ์นี้ เราใช้สัญลักษณ์ R แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และ
N แทนเซตของจำนวนนับทั้งหมด

2.1 โครงสร้างพีชคณิตของ R และ $R \times R$

หัวข้อนี้เราจะศึกษาโครงสร้างทางพีชคณิตของ R และ $R \times R$ เพื่อเป็นพื้นฐานสำหรับการให้นิยามจำนวนเชิงซ้อน

2.1.1 บทนิยาม : ให้ F เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $+ , \cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน F (นั่นคือ $+ : F \times F \rightarrow F$ และ $\cdot : F \times F \rightarrow F$) ซึ่งเราเรียกว่า " การบวก " และ " การคูณ " ตามลำดับ เราเรียกโครงสร้าง $(F ; + , \cdot)$ ว่า **ฟิลด์** (field) ถ้าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

(1) สมบัติการสลับที่สำหรับการบวกและการคูณ
นั่นคือ ถ้า $x , y \in F$ แล้ว $x+y = y+x$ และ $xy = yx$

(2) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวกและการคูณ
นั่นคือ ถ้า $x, y, z \in F$ แล้ว $x+(y+z) = (x+y)+z$ และ $x(yz) = (xy)z$

(3) สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก
นั่นคือ มี $0 \in F$ ซึ่ง $x+0 = 0+x = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in F$ เราเรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวกใน F

(4) สมบัติการมีอินเวอร์สภายใต้การบวกสำหรับแต่ละสมาชิก
นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x \in F$ มี $-x \in F$ ซึ่ง $x+(-x) = 0 = (-x)+x$ เราเรียก $-x$ ว่าอินเวอร์สภายใต้การบวกของ x

(5) สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ
นั่นคือ มี $1 \in F$ ซึ่ง $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in F$ เราเรียก 1 ว่าเอกลักษณ์การคูณใน F

(6) สมบัติการมีอินเวอร์สภายใต้การคูณ

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x \in F - \{0\}$ มี $x^{-1} \in F$ ซึ่ง $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

เราเรียก x^{-1} ของแต่ละ $x \in F - \{0\}$ ว่าอินเวอร์สภายใต้การคูณของ x

(7) สมบัติการกระจายของการคูณเหนือการบวก

นั่นคือ ถ้า $x, y, z \in F$ แล้ว $x(y+z) = xy + xz$

ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนจริงทั้งหมด R และเซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด Q กับการบวกและการคูณปกติที่เรารู้จัก ต่างเป็นฟิลด์

2.1.2 **ทฤษฎีบท** : ให้ F เป็นฟิลด์และกำหนดเซต $F \times F := \{(x, y) : x, y \in F\}$ ถ้านิยามการดำเนินทวิภาคการบวก (+) และ การคูณ ($\cdot$) บน $F \times F$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c, d \in F$ ดังนี้

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

และ $$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

แล้ว $(F \times F, +, \cdot)$ เป็นฟิลด์

บทพิสูจน์ : (1) ให้ $(a, b), (c, d) \in F \times F$ แล้วจะได้ $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in F \times F$ และ $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \in F \times F$ ทำให้ได้ว่า

$+ : (F \times F) \times (F \times F) \longrightarrow F \times F$ และ $\cdot : (F \times F) \times (F \times F) \longrightarrow F \times F$

(2) ให้ $(a, b), (c, d), (e, f) \in F \times F$ แล้วจะได้

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$$

และ $$(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)$$

นั่นคือ $$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$

และ
$$\begin{aligned}[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) &= (ac - bd, bc + ad) \cdot (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (bc + ad)f, (bc + ad)e + (ac - bd)f) \\ &= (ace - bde - bcf - adf, bce + ade + acf - bdf)\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] &= (a, b) \cdot (ce - df, de + cf) \\ &= (a(ce - df) - b(de + cf), b(ce - df) + a(de + cf)) \\ &= (ace - adf - bde - bcf, bce - bdf + ade + dcf) \\ &= (ace - bde - bcf - adf, bce + ade + acf - bdf)\end{aligned}$$

นั่นคือ $$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$$

ทำให้ได้ว่า สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวกและการคูณเป็นจริงในโครงสร้าง $(F \times F; +, \cdot)$

(3) ให้ $(a, b), (c, d) \in F \times F$ แล้วจะได้

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$

และ $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) = (ca - db, cb + da) = (c, d)(a, b)$

ทำให้ได้ว่า สมบัติการสลับที่สำหรับการบวกและการคูณเป็นจริงในโครงสร้าง $(F \times F\, ;+, \cdot)$

(4) ให้ $(a, b), (c, d), (e, f) \in F \times F$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}(a, b)\cdot[(c, d) + (e, f)] &= (a, b)(c + e, d + f)\\ &= (a(c + e) - b(d + f), b(c + e) + a(d + f))\\ &= (ac + ae - bd - bf, bc + be + ad + af)\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}(a, b)\cdot(c, d) + (a, b)\cdot(e, f) &= (ac - bd, bc + ad) + (ae - bf, be + af)\\ &= (ac - bd + ae - bf, bc + ad + be + af)\\ &= (ac + ae - bd - bf, bc + be + ad + af)\end{aligned}$$

นั่นคือ $(a, b)\cdot[(c, d) + (e, f)] = (a, b)\cdot(c, d) + (a, b)\cdot(e, f)$

ทำให้ได้ว่า สมบัติการกระจายของการคูณเหนือการบวกเป็นจริงในโครงสร้าง $(F \times F\, ;+, \cdot)$

(5) มี $(0, 0) \in F \times F$ และ $(1, 0) \in F \times F$ ซึ่งสำหรับแต่ละ $(a,b) \in F \times F$ จะได้

$(0, 0) + (a, b) = (0+a, 0+b) = (a, b)$

และ $(1, 0)\cdot(a, b) = (a\cdot 1 - 0\cdot b, 0\cdot a + 1\cdot b) = (a, b)$

ทำให้ได้ว่า $(0, 0)$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกแล้ว $(1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณบน $F \times F$ ตามลำดับ

(6) ให้ $(a, b) \in F \times F$ แล้ว $a, b \in F$ ทำให้ $-a, -b \in F$ เราจึงมี $(-a, -b) \in F \times F$ ซึ่ง $(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$ และสำหรับ $(0, 0) \neq (a, b) \in F \times F$ จะได้ว่า $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ ทำให้ $a^2 + b^2 \neq 0$ เราจึงมี $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in F \times F$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}(a, b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{-ab}{a^2+b^2}\right)\\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab - ab}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $(-a, -b)$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ (a, b) และ $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการคูณสำหรับ $(a, b) \neq (0, 0)$

เพราะฉะนั้น $(F \times F\, ;+, \cdot)$ เป็นฟิลด์ ❒

2.1.3 **บทนิยาม** : กำหนด F เป็นฟิลดิ์ และ $\varnothing \neq S \subseteq F$ เราเรียก S **ว่าฟิลดิ์ย่อย** (subfield)ของ F ถ้า S เป็นฟิลดิ์ภายใต้โอเปอเรชัน การบวกและการคูณของ F

ตัวอย่างเช่น

(1) Q เป็นฟิลดิ์ย่อยของฟิลดิ์ R ภายใต้การดำเนินการบวกและการคูณปกติ

และ (2) ฟิลดิ์ $F = \{ a + b\sqrt{2} \mid a , b \in Q \}$ เป็นฟิลดิ์ย่อยของฟิลดิ์ Q ภายใต้การดำเนินการบวกและการคูณปกติ

ถ้า S เป็นฟิลด์ย่อยของ F แล้ว S เป็นกลุ่มย่อยการบวกของ F และ $S - \{ 0 \}$ เป็นกลุ่มย่อยภายใต้การคูณของ $F - \{ 0 \}$ ทฤษฎีบท 2.1.4 ต่อไปนี้จะแสดงเกณฑ์สำหรับสับเซต S ของ F ที่จะเป็นฟิลดิ์ย่อยของ F

2.1.4 **ทฤษฎีบท** : ให้ F เป็นฟิลดิ์และ $\phi \neq S \subseteq F$ แล้ว S เป็นฟิลดิ์ย่อยของ F ก็ต่อเมื่อเงื่อนไข 2 ข้อต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $a, b \in S$ แล้ว $a - b \in S$

และ (2) ถ้า $a, b \in S$ โดยที่ $b \neq 0$ แล้ว $ab^{-1} \in S$ ❐

2.1.5 **บทนิยาม** : กำหนด F และ $\bar{F}$ เป็นฟิลดิ์และ $\phi : F \to \bar{F}$ เรากล่าวว่า ϕ เป็น**ฟังก์ชันถ่ายแบบ** (homomorphism) ถ้า $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ และ $\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(b)$ สำหรับทุก ๆ $a , b \in F$

2.1.6 **บทนิยาม** : เรากล่าวว่า ฟังก์ชันถ่ายแบบ ϕ จากฟิลดิ์ F ไปยังฟิลดิ์ $\bar{F}$ เป็น**ฟังก์ชันถอดแบบ** (isomorphism) ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

2.1.7 **บทนิยาม** : กำหนด F และ $\bar{F}$ เป็นฟิลดิ์ จะกล่าวว่า F และ $\bar{F}$ **ถอดแบบกัน** (isomorphic) ซึ่งเขียนแทนด้วย $F \cong \bar{F}$ ถ้ามีฟังก์ชันถอดแบบจาก F ไปบน $\bar{F}$

2.1.8 **ทฤษฎีบท** : ให้ $(F , + , \cdot)$ เป็นฟิลดิ์ และนิยาม $A = \{ (a,0) \in F \times F \mid a \in F \}$ แล้ว

(1) A เป็นฟิลดิ์ย่อยของ $F \times F$

และ (2) A ถอดแบบกับ F

บทพิสูจน์ :

(1) ให้ (a, 0) และ (b, 0) $\in$ A แล้ว (a, 0) + (b, 0) $\in$ A และ (a, 0) $\cdot$ (b, 0) $\in$ A ยิ่งไปกว่านั้นจะเห็นได้ว่า (a, 0) + (- b, 0) = (a – b, 0) $\in$ A และถ้า $b \neq 0$ แล้วจะได้ว่า (a, 0) $\cdot$ ($\frac{1}{b}$, 0) = ($\frac{a}{b}$,0) $\in$ A ดังนั้น A เป็นฟิลด์ย่อยของ F $\times$ F

(2) ให้ $\phi : F \times F \rightarrow F$ กำหนดโดย $\phi((a , 0)) = a$ สำหรับทุก ๆ a $\in$ F แล้วเห็นได้ว่าชัดว่า ϕ เป็นฟังก์ชัน ต่อไปให้ (a, 0), (b, 0) $\in$ A ซึ่ง $\phi((a, 0)) = \phi((b, 0))$ แล้ว $a = \phi((a, 0)) = \phi((b, 0)) = b$ ฉะนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและ ถ้า a $\in$ F แล้ว $\phi((a, 0)) = a$ ฉะนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

นอกจากนั้น $\phi((a, 0) + (b, 0)) = \phi(a+b, 0) = a + b = \phi((a, 0)) + \phi((b, 0))$

และ $\phi((a, 0)\cdot(b, 0)) = \phi(ab, 0) = ab = \phi((a, 0)) \cdot \phi((b, 0))$

ดังนั้น A และ F เป็นฟิลด์ถอดแบบกัน ❒

จากทฤษฎีบท 2.1.8 จะเห็นว่า { (x, 0) I x $\in$ F } เป็นฟิลด์ย่อยของ F $\times$ F ซึ่งฟิลด์ถอดแบบกับ F ดังนั้นแต่ละ x $\in$ F จะเป็นอิมเมจของ (x, 0) $\in$ { (t, 0) I t $\in$ F } และโดยกลับกัน ในความหมายนี้ เราจะกล่าวว่า x **สมนัย** (correspondence) กับ (x, 0)

2.2 บทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน

เป็นที่ทราบกันดีว่าสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริงเมื่อ $b^2 - 4ac > 0$ แต่ถ้าเราต้องการหารากของสมการ $x^2 + 1 = 0$ จะพบว่า $b^2 - 4ac = 0 - 4 = -4 < 0$ นั่นคือไม่สามารถหารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^2 + 1 = 0$ ได้ จึงมีคำถามว่าแล้วรากของสมการเป็นอะไร เกาส์สังเกตว่ารากที่สองของจำนวนจริงลบ เขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนจริงบวกตัวหนึ่งกับรากที่สองของ – 1 ดังนี้

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} \quad \text{เมื่อ} \quad a \geq 0$$

เกาส์จึงแนะนำจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดบนระนาบ R $\times$ R นั่นคือกำหนดให้แต่ละคู่อันดับ (a, b) เมื่อ a , b $\in$R เป็นจำนวนเชิงซ้อน และเรียก R $\times$ R ว่า “ **ระนาบเชิงซ้อน** (complex plane) ” ถ้าแทน R×R ด้วย C เกาส์นิยามการบวก $+ : C \times C \rightarrow C$ และการคูณ $\cdot : C \times C \rightarrow C$ บนระนาบเชิงซ้อนดังนี้

$$(a,b)+ (c,d) = (a+c , b+d)$$

และ

$$(a,b) (c,d) = (ac – bd , bc + ad)$$

ตามลำดับ โดยทฤษฎีบท 2.1.2 และ ทฤษฎีบท 2.1.8 ทำให้ได้ว่า (C , + , $\cdot$) เป็นฟิลด์ที่มีฟิลด์ย่อย { (a,0) $\in$ F×F I a $\in$ F } ถอดแบบกับ (R , + , $\cdot$) จึงทำให้ได้ว่า (0,1)(0,1) = (-1, 0) ซึ่งสมนัยกับจำนวนจริง - 1 แสดงว่าใน C มีรากของสมการ $x^2 + 1 = 0$

เนื่องจากแต่ละจำนวนเชิงซ้อนเขียนได้ในรูปดังนี้ (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)

โดยที่ (1, 0) และ (0, 1) เป็นหนึ่งหน่วยตามแกน x และแกน y ของระนาบ R×R ตามลำดับ ยิ่งไปกว่านั้น (1, 0) สมนัยกับจำนวนจริง 1 จึงมีการกำหนดสัญลักษณ์ i ขึ้นเพื่อแทนหรือให้สมนัยกับคู่อันดับ (0,1) ทำให้เราเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปใหม่ซึ่งเป็นรูปแบบเดียวกับจำนวนจริง ได้อีกรูปแบบหนึ่งดังนี้ a + ib หรือ a + bi โดยที่ $a , b \in R$ เราเรียก a ว่า "**ส่วนจริง (real part)** ของ a + bi " และเรียก b ว่า " **ส่วนจินตภาพ (imaginary part)** ของ a + bi " และถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน เราจะใช้สัญลักษณ์ Re(z) และ Im(z) แทนส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ z ตามลำดับ

2.2.1 **ข้อสังเกต** :

1. $i^2 = (i)(i) = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 + 0I = -1$
2. $(a + ib) + (c + id) = (a+c) + i(b+d)$
3. $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

   [ขอให้สังเกตว่าเราอาจคูณจำนวนเชิงซ้อนได้เช่นเดียวกับการคูณจำนวนจริงโดยใช้สมบัติการกระจายและแทน $i^2 = -1$]
4. $\dfrac{a+ib}{c+id} = \left(\dfrac{a+ib}{c+id}\right)\left(\dfrac{c-id}{c-id}\right) = \dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$ เมื่อ $c \neq 0$ หรือ $d \neq 0$
5. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ (เป็นจำนวนจริงบวก)
6. จากนิยามของจำนวนเชิงซ้อน เราได้ว่า " $a + ib = c + id$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ "
7. ถ้า a + ib เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $\sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2+b^2}$

   ซึ่งคือระยะทางจากจุดกำเนิด (0, 0) ไปยังจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ในระนาบ R×R

2.2.2 **บทนิยาม** : ให้ z = a + ib เป็นจำนวนเชิงซ้อน เราเรียกจำนวนเชิงซ้อน a - ib ว่า **สังยุค(conjugate)** ของ z = a + ib และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\bar{z}$ หรือ $\overline{a+ib}$

ขอให้สังเกตว่า a + ib = a – (- ib) เป็นสังยุคของ a + (- ib) = a - ib นั่นคือจำนวนเชิงซ้อนแต่ละตัวเป็นสังยุคของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเอง

2.2.3 **บทนิยาม** : เราเรียกระยะทางจากจุดกำเนิด (0, 0) หรือจำนวนเชิงซ้อน 0 ไปยังจำนวนเชิงซ้อน z = a+ ib ซึ่งมีค่าเท่ากับจำนวนจริงบวก $\sqrt{a^2+b^2}$ ว่า **ค่าสัมบูรณ์** (absolute) หรือ **โมดูลัส** (modulus) ของ z และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|z| = |a+ib|$

2.2.4 **ข้อสังเกต** :

1. ถ้า z = a + ib เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |a+ib|^2 = a^2+b^2$
2. ถ้า $z_1 = a_1 + ib_1$ และ $z_2 = a_2 + ib_2$ แล้ว

$$|z_1-z_2| = |(a_1-a_2)^2+i(b_1-b_2)| = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

ซึ่งแสดงว่า $|z_1-z_2|$ คือ ระยะห่างระหว่าง z_1 กับ z_2

3. ถ้า a เป็นจำนวนเชิงซ้อนคงค่า และ r เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $\{z \in C \mid |z-a| \le r\}$ คือเซตของจุดทั้งหลายในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจาก a น้อยกว่าหรือเท่ากับ r ซึ่งก็คือเซตของจุดในแผ่นวงกลมที่มีรัศมี r หน่วยและมี a เป็นจุดศูนย์กลาง

2.2.5 ทฤษฎีบท : สมบัติของสังยุคและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

1. $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ และ $\bar{\bar{z}} = z$
2. $|zw| = |z||w|$ และ $|z+w| \le |z|+|w|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$
4. $|\bar{z}| = |z|$
5. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ และ $|z^{-1}| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
6. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ และ $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$

บทพิสูจน์ : ให้ $z = a+ib$ และ $w = c+id$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว

(1) $\overline{z+w} = \overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c)-i(b+d)$

$= (a-ib)+(c-id) = \bar{z}+\bar{w}$,

$\overline{zw} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+i(bc+ad)}$

$= (ac-bd)-i(bc+ad) = (a-ib)(c-id) = \bar{z}\,\bar{w}$,

$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = a+ib = z$

(2) $|zw| = |(a+ib)(c+id)| = |(ac-bd)+i(bc+ad)|$

$= \sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$

$= \sqrt{a^2c^2-2(ac)(bd)+b^2d^2+b^2c^2+2(bc)(ad)+a^2d^2}$

$= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z|\,|w|$

หมายเหตุ : การพิสูจน์ $|z+w| \le |z|+|w|$ จะแสดงในทฤษฎีบท 3.1.1

(3) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$

(4) $|\bar{z}| = |a-ib| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

(5) ให้ $z \neq 0$ แล้ว $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{1}{a-ib}\cdot\frac{a+ib}{a+ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \left(\frac{\overline{a-ib}}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

และ $$\left|z^{-1}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{a+ib}\right| = \left|\frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib}\right| = \left|\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right|$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\left(a^2+b^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

(6) $$z+\bar{z} = (a+ib)+(a-ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z-\bar{z} = (a+ib)-(a-ib) = 2bi = 2\,\mathrm{Im}(z)$$ ❑

2.2.6 ตัวอย่าง : ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งแต่ละจำนวนเขียนได้ในรูปผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์ของจำนวนเต็ม 2 จำนวน แล้วจะแสดงว่า mn ก็เขียนได้ในรูปผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์ของจำนวนเต็ม 2 จำนวนเช่นเดียวกัน

วิธีทำ : ให้ $a, b, c, d \in Z$ และ $m, n \in \mathbf{N}$ โดยที่ $m = a^2+b^2$ และ $n = c^2+d^2$ และกำหนดให้ $z = a+ib$ และ $w = c+id$ แล้ว

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{และ} \quad |w| = \sqrt{c^2+d^2}$$

ดังนั้น $$mn = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = |z|^2|w|^2 = |zw|^2 = |(a+b\,i)(c+d\,i)|^2$$

ซึ่งแสดงว่า $$mn = |(ac-bd)+i(bc+ad)|^2 = (ac-bd)^2+(bc+ad)^2$$

อยู่ในรูปผลบวกกำลังสองสมบูรณ์ ตามที่ต้องการ #

เพื่อแสดงให้เห็นว่าในระบบจำนวนเชิงซ้อน เราหารากที่สองของจำนวนในเซตนี้ได้ครบทั้งหมด เราจะแสดงการสร้างกระบวนการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

2.2.7 บทนิยาม : ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน เราเรียก w ว่า **รากที่สอง** (square root) ของ z ถ้า $w^2 = z$

2.2.8 ตัวอย่าง : ในตัวอย่างนี้จะแสดงการสร้างกระบวนการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน $x + iy$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

วิธีทำ : ให้ $a + ib$ เป็นรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ แล้ว

$$x+iy = (a+ib)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

ทำให้ได้ $a^2 - b^2 = x$ ……………………(1)

และ $2ab = y$ ……………………(2)

สังเกตว่าถ้าเราพยายามหาค่า a และ b จากสมการ (1) และ (2) โดยตรงจะเกิดความยุ่งยากและอาจมีข้อผิดพลาดได้ง่ายเราจึงวิเคราะห์หาวิธีการใหม่ โดยสังเกตว่าสมการ (1) กับสมการในรูปแบบ $a^2 + b^2 = c$ จะทำให้เราหาค่า a และ b ได้ง่ายขึ้นและเราสามารถสร้างสมการในรูปแบบ $a^2 + b^2 = c$ ได้จากสมการ (1) และ (2) ดังนี้

จาก $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + 4a^2b^2$

$= (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = x^2 + y^2$

เราจะได้ $a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ……………………(3)

ถ้านำสมการ (1) และ (3) มาบวกกัน จะได้ $a^2 = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ และถ้าเรานำสมการ (1) และ (3) มาลบกัน จะได้ $b^2 = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ ซึ่งทำให้ได้

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad \text{และ} \quad b^2 = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

สังเกตจากสมการ (2) ซึ่งแสดงว่า $2ab = y$ นั่นคือเครื่องหมายของผลคูณ ab ต้องเหมือนกับของ y เราจึงเลือก a และ b ดังนี้

ถ้า $y < 0$ รากของ z คือ

$$\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \quad \text{กับ} \quad -\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

ถ้า $y > 0$ รากของ z คือ

$$\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \quad \text{กับ} \quad -\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$ #

2.2.9 หมายเหตุ : ถ้า $a + ib$ เป็นรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ แล้วเครื่องหมายของ a และ b ถูกกำหนดโดย $2ab = y$

2.2.10 ตัวอย่าง : จงเขียนจำนวน $\sqrt{\sqrt{9 + 40i} + \sqrt{9 - 40i}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ : ให้ $\pm(a + ib)$ เป็นรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน $z = 9 \pm 40i$ แล้วจะได้

$9 \pm 40i = (a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

ทำให้ได้ $a^2 - b^2 = 9$ ……………………(1)

และ $2ab = \pm 40$ ……………………(2)

เราจะได้ $a^2 + b^2 = \sqrt{9^2 + 40^2}$ ……………………(3)

จาก (1) และ (3) จะได้ $a^2 = 25$ และ $b^2 = 16$

ซึ่งทำให้ได้ $a = \pm 5$ และ $b = \pm 4$

ดังนั้น $\sqrt{9+40i} = \pm(5+4i)$ และ $\sqrt{9-40i} = \pm(5-4i)$

ทำให้ได้ว่า $\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i} = \pm(5+4i)\pm(5-4i)$

ดังนั้น $\sqrt{\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i}}$ คือจำนวนตามลำดับต่อไปนี้

รากที่สองของ 10 คือ $\pm\sqrt{10}$

รากที่สองของ -10 คือ $\pm\sqrt{10i}$

รากที่สองของ $\pm 8i$ คือ $\pm\sqrt{8i}$ คือ $\pm(2+2i)$ กับ $\pm(2-2i)$

เพราะฉะนั้นรูปอย่างง่ายของ $\sqrt{\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i}}$ คือ $\pm\sqrt{10}$, $\pm\sqrt{10i}$, $\pm(2+2i)$ หรือ $\pm(2-2i)$ #

2.2.11 ทฤษฎีบท : ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z เป็นรากของพหุนาม $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$ โดยที่สัมประสิทธิ์ $p_1, p_2, \dots, p_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริงแล้วสังยุค $\bar{z}$ ก็เป็นรากของพหุนามนี้ด้วย

บทพิสูจน์ : ให้ $f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$ โดยที่ $p_1, p_2, \dots, p_n$ เป็นจำนวนจริงและให้ $z = a + ib$ เป็นรากของ $f(x)$ แล้ว

$$f(a+ib) = (a+ib)^n + p_1 (a+ib)^{n-1} + p_2 (a+ib)^{n-2} + \dots + p_{n-1}(a+ib) + p_n = 0$$

ทำให้ได้ $\overline{f(a+ib)} = \overline{(a+ib)^n + p_1 (a+ib)^{n-1} + p_2 (a+ib)^{n-2} + \dots + p_{n-1}(a+ib) + p_n}$

$$= \bar{0} = 0$$

ซึ่งแสดงว่า

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{(a+ib)^n + p_1 (a+ib)^{n-1} + p_2 (a+ib)^{n-2} + \dots + p_{n-1}(a+ib) + p_n} \\ &= \overline{(a+ib)^n} + \overline{p_1 (a+ib)^{n-1}} + \overline{p_2 (a+ib)^{n-2}} + \dots + \overline{p_{n-1}(a+ib)} + \overline{p_n} \\ &= \overline{(a+ib)^n} + \overline{p_1}\,\overline{(a+ib)^{n-1}} + \overline{p_2}\,\overline{(a+ib)^{n-2}} + \dots + \overline{p_{n-1}}\,\overline{(a+ib)} + \overline{p_n} \end{aligned}$$

เพราะว่า $p_1, p_2, \dots, p_n$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\overline{p_i} = p_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, n$ เราจะได้

$$0 = (a-ib)^n + p_1 (a-ib)^{n-1} + p_2 (a-ib)^{n-2} + \dots + p_{n-1}(a-ib) + p_n = f(a-ib)$$

ซึ่งแสดงว่า $\bar{z} = a - ib$ เป็นรากของสมการที่กำหนดเช่นกัน ❑

2.2.12 ตัวอย่าง : ให้ P(x) เป็นพหุนามโมนิกกำลัง 4 (ดูนิยามในภาคผนวก 9) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงซึ่งมี $x + 2 - 5i$ และ $x - 1 + 3i$ เป็นตัวประกอบ จงหา P(- 2)

วิธีทำ : ให้ P(x) เป็นพหุนามโมนิกที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงซึ่งมี $x + 2 - 5i$ และ $x - 1 + 3i$ เป็นตัวประกอบ นั่นคือมีพหุนาม Q(x) ซึ่ง $P(x) = (x + 2 - 5i)(x - 1 + 3i)Q(x)$ ทำให้ได้ $P(-2 + 5i) = 0$ และ $P(1 - 3i) = 0$ ซึ่งแสดงว่า $-2 + 5i$ และ $1 - 3i$ เป็นรากของ P(x) และโดยทฤษฎีบท 2.2.11 ทำให้ได้ว่า $-2 - 5i$ และ $1 + 3i$ ก็เป็นรากของ P(x) ด้วยเช่นกัน เราจึงมีพหุนาม H(x) ซึ่ง

$$P(x) = (x + 2 - 5i)(x + 2 + 5i)(x - 1 + 3i)(x - 1 - 3i)H(x)$$

แต่เพราะว่ากำลังของ P(x) เป็นพหุนามกำลัง 4 เราจึงได้ H(x) = 1 และได้

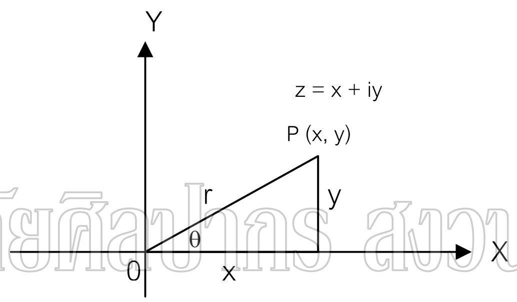
$$P(x) = (x + 2 – 5i)(x + 2 + 5i)(x – 1 + 3i)(x – 1 – 3i)$$
$$= (x^2 + 4x + 29)(x^2 – 2x + 10)$$

เพราะฉะนั้น

$$P(–2) = ((–2)^2 + 4(–2) + 29)((–2)^2 – 2(–2) + 10) = (4 – 8 + 29)(4 + 4 + 10)$$
$$= (25)(28) = 450 \qquad \#$$

2.3 รูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

เราสังเกตจากนิยามการคูณและการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนแล้วจะเห็นว่า ถ้าเราต้องคูณจำนวนเชิงซ้อนหลาย ๆ จำนวน หรือยกกำลัง n หรือหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามาก ๆ คงจะยุ่งยากมากทีเดียว เราจึงหาวิธีการอื่น ที่จะช่วยให้เราแก้ปัญหาเหล่านี้ได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 2.3.1

สังเกตว่าจำนวนเชิงซ้อน x + iy สามารถแทนได้ด้วยจุด P (x , y) ในระนาบดังรูป 2.3.1 เราจึงหาทางแก้ปัญหาโดยใช้แผนภาพเข้าช่วย และเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.3.1 แล้วพบว่าเราสามารถประยุกต์ทฤษฎีบทของปีธากอรัสเพื่อหาค่า x และ y ในเทอมของ r และ θ ได้ เมื่อกำหนดให้ θ เป็นมุมที่วัดในทิศทวนเข็มนาฬิกา จากแกน X ทางด้านบวก และ r แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับจุด P ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = r\cos\theta \quad \text{และ} \quad y = r\sin\theta$$

นอกจากนี้เรายังได้ความสัมพันธ์ที่ทำให้หาค่า r และ θ ในเทอมของ x และ y ได้ดังนี้

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \qquad \text{และ} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

เราจึงอาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ได้ในรูปใหม่ดังนี้

$$z = x + iy = (r\cos\theta) + i(r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\text{cis}\,\theta$$

เราเรียกจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่า **รูปแบบเชิงขั้ว** (polar form) ของ z เราเรียก r หรือ $|z|$ ว่า **ค่าสัมบูรณ์** (absolute) ของ z และเขียนแทน θ ดังกล่าวของ z ด้วยสัญลักษณ์ " arg (z) " และเรียกว่า **อาร์กิวเมนต์** (argument) ของ z

ขอให้สังเกตว่าถ้า $\theta = \arg(z)$ แล้ว $\theta + 2n\pi$ จะเป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วยสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n แสดงว่า รูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน z จำนวนเดียวกันอาจมีอาร์กิวเมนต์ได้มากมายหลายค่า แต่ในสารนิพนธ์นี้เราจะกำหนดค่า arg(z) อยู่ระหว่าง 0 ถึง 2π

อย่างไรก็ตามถ้า $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ และ $\rho\,\mathrm{cis}\,\beta$ ต่างเป็นรูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน z จำนวนเดียวกันแล้ว $r = \rho$ และจะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $\beta = \theta + 2n\pi$ นั่นคือ " $r\mathrm{cis}\theta = \rho\mathrm{cis}\beta$ ก็ต่อเมื่อ $r = \rho$ และ $\beta = \theta + 2n\pi$ เมื่อ $n \in Z$ "

เราเรียกความสัมพันธ์ของ θ กับ $\theta + 2n\pi$ ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ ว่า " มุมสมมูลกัน " ดังนั้นถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $\theta - \beta \neq 2n\pi$ แล้ว $r\,\mathrm{cis}\,\theta \neq \rho\,\mathrm{cis}\,\beta$

2.3.1 ตัวอย่าง : การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว

1. $-2-2i$

วิธีทำ : ให้ $r\cos\theta$ เป็นรูปแบบเชิงขั้วของ $-2-2i$ จะได้

$$r = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

เนื่องจาก $\frac{-2}{-2} = 1$ จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ค่า $\tan\theta = 1$ คือ $\theta = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\theta = \frac{5\pi}{4}$ แต่ $-2-2i$ อยู่ในจตุภาคที่ 3 ดังนั้น $\theta = \frac{5\pi}{4}$ จึงทำให้ได้ว่า

$$-2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{4}+2k\pi)+i\sin(\frac{5\pi}{4}+2k\pi)\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) \text{ เมื่อ } k\in Z$$

2. $\sqrt{3}-i$

วิธีทำ : ให้ $r\cos\theta$ เป็นรูปแบบเชิงขั้วของ $\sqrt{3}-i$ จะได้

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

เนื่องจาก $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ค่า $\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ คือ $\theta = -\frac{\pi}{6}$ หรือ $\theta = \frac{5\pi}{6}$

แต่ $\sqrt{3}-i$ อยู่ใน จตุภาคที่ 4 ดังนั้น $\theta = -\frac{\pi}{6}$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}+2k\pi)+i\sin(-\frac{\pi}{6}+2k\pi)\right) = 2\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) \text{ เมื่อ } k\in Z \qquad \#$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว จะทำให้การคำนวณผลคูณหรือการยกกำลังต่าง ๆ กระทำได้ง่ายขึ้น โดยใช้ผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

2.3.2 ทฤษฎีบท : ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$
2. $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$ ถ้า $z_2 \neq 0$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$ ถ้า $z_2 \neq 0$
4. $\overline{z_1} = r_1\left[\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)\right]$

บทพิสูจน์ : ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

(1) $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)]\,[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)] \\ &= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

(2) ถ้า $z_2 \neq 0$ แล้ว
$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{1}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)} = \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

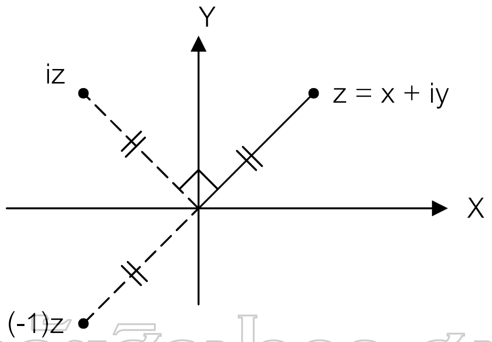
(3) เพราะว่า $\cos(-\theta) = \cos\theta$ และ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ดังนั้น ถ้า $z_2 \neq 0$ จะได้ $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) = \dfrac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2) - i\sin(-\theta_2))$

ซึ่งทำให้ได้

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] \qquad \text{(โดยข้อ 1)} \end{aligned}$$

(4) ใช้เหตุผลเดียวกับข้อ 3 จะได้
$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= r_1\left[\cos(\theta_1) - i\sin(\theta_1)\right] \\ &= r_1\left[\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)\right] \end{aligned}$$ ❐

ขอให้สังเกตว่าถ้าเราคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ด้วย i โดยที่ i เขียนในรูปแบบเชิงขั้วได้เป็น $i = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ เราจะได้ $zi = r[\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\theta+\frac{\pi}{2})]$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุดกำเนิด (นั่นคือค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนนั้น) เท่ากับ $r = |z|$ แต่อาร์กิวเมนต์ของ zi จะมากกว่าของ z อยู่ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน ดังนั้นถ้าพิจารณาโดยรูปที่ 2.3.2 จะเห็นว่า zi เกิดขึ้นโดยการหมุนเส้นตรงที่ลากเชื่อมโยง z กับจุดกำเนิดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน [และถ้าเราคูณ z ด้วย i สองครั้ง (นั่นคือคูณ z ด้วย -1) จะได้จำนวนเชิงซ้อนผลคูณที่เกิดขึ้นโดยการหมุนเส้นตรงที่ลากเชื่อมโยง z กับจุดกำเนิดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเท่ากับ π เรเดียน]



รูปที่ 2.3.2

เราจึงอาจกล่าวได้ว่าการคูณจำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนด้วยจำนวนเชิงซ้อน i เป็นการส่ง $z \rightarrow zi$ ซึ่งก็คือ*การแปลงแบบหมุน*(rotation transformation) ระนาบเชิงซ้อนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไป $\frac{\pi}{2}$ เรเดียนนั่นเอง

2.3.3 **ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์** (De Moivre ' s Theorem) :

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วและ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

บทพิสูจน์ : จะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ P(n) แทนข้อความ " $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ "

ขั้นฐาน : เมื่อ n = 1 เราจะได้จากสมมติฐานของทฤษฎีบทว่า

$z^1 = z = r[\cos\theta + i\sin\theta] = r^1[\cos(1\cdot\theta) + i\sin(1\cdot\theta)]$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง P(k) เป็นจริง นั่นคือ $z^k = r^k[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)]$

โดย P(1) และ P(k) จะได้

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = [\, r\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,]\,[\, r^k\,(\cos k\theta + i\sin k\theta)\,]$$

$$= r^{k+1}\,[\cos(\theta + k\theta) + i\sin(\theta + k\theta)\,]$$

$$= r^{k+1}\,[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\,]$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะได้ว่าทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์เป็นจริง ❐

2.3.4 ผลพลอยได้จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ :

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ โดย $z \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มลบ แล้ว $-n$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ ทำให้ได้

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^{-n}\left[\cos(-n\theta + i\sin\left(-n\theta\right)\right]}$$

(เพราะว่า $1 = \cos 0 + i\sin 0$)

$$= r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

(โดยทฤษฎีบท 2.3.2 ข้อ 3)

เพราะฉะนั้นทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม ❐

2.3.5 ตัวอย่าง : ต้องการคำนวณหาค่า $(1-i)^6$

วิธีทำ : ให้ $z = 1-i$ แล้ว $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ เนื่องจาก $\frac{-1}{1} = -1$ จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ค่า $\tan\theta = -1$ คือ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ หรือ $\theta = \frac{7\pi}{4}$ แต่ $1-i$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 ดังนั้น $\theta = -\frac{\pi}{4}$ จึงทำให้ได้ว่า $1-i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ แล้วโดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ว่า

$$(1-i)^6 = \sqrt{2}^6 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^6 = \sqrt{2}^6 \operatorname{cis}\left((6)(-\frac{\pi}{4})\right) = 8\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{2})\right)$$

ดังนั้น $(1-i)^6 = 8\left(\cos(-\frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{3\pi}{2})\right) = 8(0+i) = 8i$ #

บทที่ 3
การประยุกต์ของจำนวนเชิงซ้อน
(Applications of Complex Numbers)

ในบทนี้ เราแสดงการประยุกต์สมบัติเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน ในปัญหาการหาผลบวกสัมประสิทธิ์ทวินาม ปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ และปัญหาของพหุนาม

3.1 การประยุกต์สมบัติเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน

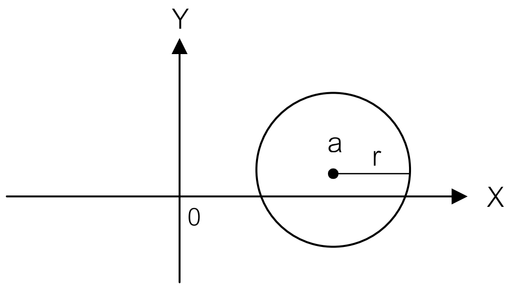
เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนคือคู่อันดับ (a ,b) ในระนาบ $R \times R$ หรือจุดบนระนาบซึ่งกำหนดให้เขียนในรูป a + ib โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง จึงอาจแทนเซตของจำนวนเชิงซ้อนด้วยแผนภาพ ในระบบแกนมุมฉาก เราเรียกแกนนอนว่า *แกนจริง (real axis)* และเรียกแกนตั้งว่า *แกนจินตภาพ (imaginary axis)* และเรียกระนาบที่เกิดจากแกนทั้งสองว่า *ระนาบเชิงซ้อน (complex plane)* เพื่อความสะดวกจะใช้ แกน X แทนแกนจริงและแกน Y แทนแกนจินตภาพ

ถ้า $z_1 = a+ib$ และ $z_2 = c+id$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วค่าสัมบูรณ์ $|z_1 - z_2|$ จะหมายถึงระยะทางระหว่างจุดกำเนิด (0, 0) กับจุดที่แทนจำนวนเชิงซ้อน $z_1 - z_2 = (a-c)+i(b-d)$ ฉะนั้น

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

ซึ่งจำนวนทางขวามือของสมการคือระยะทางระหว่างจุด (a, b) และจุด (c, d) ในระนาบ ดังนั้น $|z_1 - z_2|$ ก็คือระยะทางระหว่างจุด z_1 และจุด z_2 ในระนาบเชิงซ้อนนั่นเอง

ถ้า a เป็นจำนวนเชิงซ้อนคงค่าและ r เป็นจำนวนจริงบวกคงค่าแล้ว $\{ z \in C \mid |z-a| \le r \}$ คือเซตของจุดทั้งหลายในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจาก a น้อยกว่าหรือเท่ากับ r ซึ่งก็คือเซตของจุดทั้งหลายที่อยู่ภายในและบนเส้นรอบวงของวงกลมที่มี a เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมี r หน่วย ดังรูปที่ 3.1.1



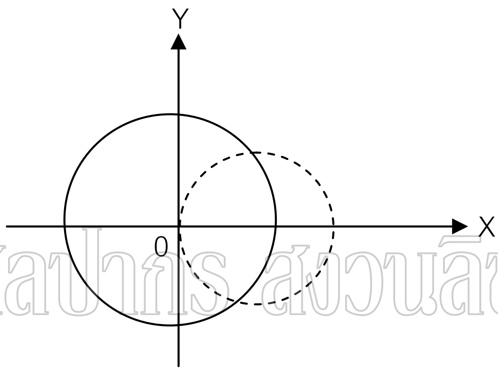
รูปที่ 3.1.1

ตัวอย่างต่อไปนี้ เราจะแสดงแผนภาพของจำนวนเชิงซ้อนโดยประยุกต์ความหมายของ $|z_1 - z_2|$

3.1.1 ตัวอย่าง : จงวาดแผนภาพของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหลายในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการหรืออสมการ ในข้อต่อไปนี้

1. $|z| \geq 3$ และ $|z-2| < 2$

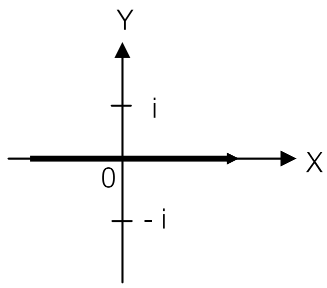
วิธีทำ : เนื่องจาก $|z| = |z-0|$ คือระยะทางระหว่างจุดกำเนิด 0 = (0, 0) กับจุด z ดังนั้นเซตของจุด z ทั้งหลายในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องอสมการ $|z| \geq 3$ ก็คือเซตของจุดทั้งหลายในระนาบเชิงซ้อน ที่อยู่ห่างจากจุด (0, 0) มากกว่าหรือเท่ากับ 3 หน่วยนั่นเอง ซึ่งก็คือเซตของจำนวนเชิงซ้อนหรือจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงและภายนอกของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และมีรัศมียาว 3 หน่วย ในทำนองเดียวกัน $|z-2|$ คือระยะทางระหว่างจุด (2, 0)กับจุด z ดังนั้นเซตของจุด z ทั้งหลายในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องอสมการ $|z-2| < 2$ ก็คือเซตของจำนวนเชิงซ้อนหรือจุดที่อยู่ภายในวงกลม (ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่ 0 มีจุดศูนย์กลางที่ (2, 0) และรัศมียาว 2 หน่วย เราจึงได้แผนภาพของจุด z ทั้งหมดที่สอดคล้องอสมการทั้งสองดังแสดงเป็นพื้นที่แรเงาในรูปที่ 3.1.2



รูปที่ 3.1.2

2. $|z+i| = |z-i|$

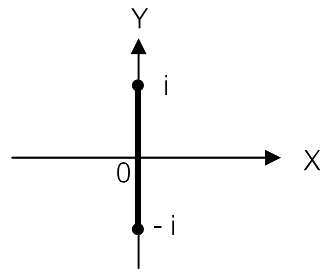
วิธีทำ : แผนภาพของจำนวนเชิงซ้อนในตัวอย่างนี้ คือ แผนภาพของจุด z บนระนาบที่มีระยะห่างจาก i ซึ่งคือจุด (0, 1) เท่ากับระยะห่างจาก – i ซึ่งคือจุด (0, -1) จะคือแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดทุกจุดบนแกน X ซึ่งแสดงดังรูปที่ 3.1.3



รูปที่ 3.1.3

3. $|z+i|+|z-i| = 2$

วิธีทำ : แผนภาพของจำนวนเชิงซ้อนในตัวอย่างนี้ คือ แผนภาพของจุด z บนระนาบที่มีระยะห่างจาก i รวมกับระยะห่างจาก $-i$ เท่ากับ 2 หน่วย จึงคือแผนภาพที่ประกอบด้วยทุกจุดบนแกน Y ที่อยู่ในช่วง $[-i, i]$ ดังรูปที่ 3.1.4



รูปที่ 3.1.4

3.1.2 ตัวอย่าง : ให้ A เป็นบริเวณในระนาบเชิงซ้อนที่ประกอบด้วยจุด z ทั้งหลายที่ทำให้ $\frac{z}{40}$ และ $\frac{40}{\bar{z}}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงและส่วนจินตภาพมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วเราต้องการหาจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงกับพื้นที่ของ A มากที่สุด

วิธีทำ : ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน (โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง) อยู่ในบริเวณ A ดังกล่าว

แล้ว $\frac{z}{40} = \frac{a+bi}{40} = \frac{a}{40} + \frac{b}{40}i$ และ $\frac{40}{\bar{z}} = \frac{40}{a-bi} = \frac{40(a+bi)}{a^2+b^2} = \frac{40a}{a^2+b^2} + \frac{40b}{a^2+b^2}i$

ทำให้ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองคือ $\frac{a}{40}$ กับ $\frac{40a}{a^2+b^2}$ และส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองคือ $\frac{b}{40}$ กับ $\frac{40b}{a^2+b^2}$ ตามลำดับ ซึ่งตามที่โจทย์กำหนดค่าเหล่านี้อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 จึงได้ว่า

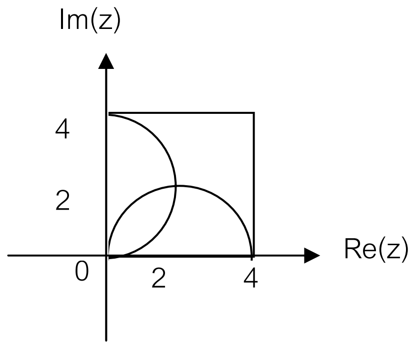
$$0 \le \frac{a}{40} \le 1 \quad \text{ซึ่งสมมูลกับ} \quad 0 \le a \le 40 \quad \text{และ}$$

$$0 \le \frac{40a}{a^2+b^2} \le 1 \quad \text{ซึ่งสมมูลกับ} \quad 20 \le [a-20]^2 + b^2 \quad \text{และ}$$

$$0 \le \frac{b}{40} \le 1 \quad \text{ซึ่งสมมูลกับ} \quad 0 \le b \le 40 \quad \text{และ}$$

$$0 \le \frac{40b}{a^2+b^2} \le 1 \quad \text{ซึ่งสมมูลกับ} \quad 20 \le [b-20]^2 + a^2$$

เราสามารถเขียนแผนภาพแสดงบริเวณ A ในระนาบเชิงซ้อน ได้จากการเขียนแผนภาพแสดงเซตคำตอบของอสมการ $0 \le a \le 40$, $20 \le [a-20]^2 + b^2$, $0 \le b \le 40$ และ $20 \le [b-20]^2 + a^2$ ดังแสดงเป็นส่วนแรเงาในรูปที่ 3.1.5



รูปที่ 3.1.5

พื้นที่ของบริเวณ A $= 40^2 - \dfrac{20^2\pi}{2} - 20^2$

$= 1600 - 200\pi - 400$

$= 1200 - 200\pi$

$= 1200 - 200\left(\dfrac{22}{7}\right)$ (โดยการแทน $\pi = \dfrac{22}{7}$)

≈ 571.43 ตารางหน่วย

ดังนั้นจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงกับพื้นที่ของบริเวณ A คือ 571 #

3.1.3 ตัวอย่าง : ให้จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งซึ่ง $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ และเราต้องการทราบค่าของ $\arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right)$

วิธีทำ : โดยทฤษฎีบท 2.3.1 ข้อ 3 จะได้ว่า $\arg\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)$

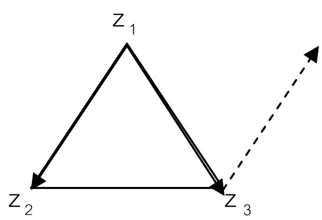
และจากโจทย์กำหนดให้ $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ แสดงว่า

$$\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

แต่เพราะว่า $z - w$ หมายถึงจำนวนเชิงซ้อนหรือเวคเตอร์ที่มีทิศทางจาก w ไปยัง z เราจึงได้ว่า

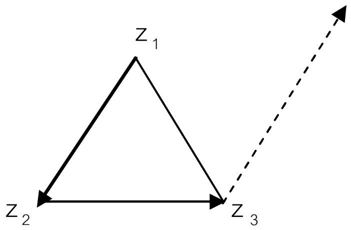
$$\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)$$

เป็นมุมที่ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากจาก z_1 ไปยัง z_3 ทำกับส่วนของเส้นตรงที่ลากจาก z_1 ไปยัง z_2 ในทิศทวนเข็มนาฬิกา เมื่อค่านี้เท่ากับ $\dfrac{\pi}{3}$ เรเดียนซึ่งเท่ากับมุมสามเหลี่ยมด้านเท่า เราจึงกำหนดการวางเรียงจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ซึ่งเป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่า ในระนาบได้ดังรูปที่ 3.1.6



รูปที่ 3.1.6

และทำให้ได้ว่า $\arg\left(z_3 - z_2\right) - \arg\left(z_2 - z_1\right)$ เป็นมุมที่ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากจาก z_2 ไปยัง z_3 ทำกับส่วนของเส้นตรงที่ลากจาก z_1 ไปยัง z_2 ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน ดังรูปที่ 3.1.7



รูปที่ 3.1.7

เพราะฉะนั้น $\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(z_3 - z_2\right) - \arg\left(z_2 - z_1\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ #

3.1.4 **ทฤษฎีบท : อสมการสามเหลี่ยม** (Triangle Inequality)

ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$

บทพิสูจน์ : ให้ $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\left|z_1 + z_2\right|^2 &= \left(z_1 + z_2\right)\overline{\left(z_1 + z_2\right)} = \left(z_1 + z_2\right)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= \left|z_1\right|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + \left|z_2\right|^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)
\end{aligned}$$

และเพราะว่า

$$\begin{aligned}
z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} &= \left[r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)\right]\left[r_1\left(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)\right)\right] \\
&\qquad + \left[r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\right]\left[r_2\left(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\right)\right] \\
&= r_1r_2\left[\left(\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\right] + r_1r_2\left[\left(\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\right]\right.\right. \\
z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} &= r_1r_2\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\{\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)\}\right] \\
&= 2r_1r_2\left(\cos(\theta_2 - \theta_1)\right) \le 2r_1r_2 = 2\left|z_1\right|\left|z_2\right|
\end{aligned}$$

เราจะได้ $\qquad |z_1+z_2|^2 \quad \leq \quad |z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2 \ = \ (|z_1|+|z_2|)^2$

เพราะฉะนั้น $\qquad |z_1+z_2| \quad \leq \quad |z_1|+|z_2|$ ❑

3.1.5 ตัวอย่าง : เราจะแสดงว่าถ้า $|z|=1$ แล้ว $|1-z| \ = \ 2\sin\left(\frac{\arg(z)}{2}\right)$

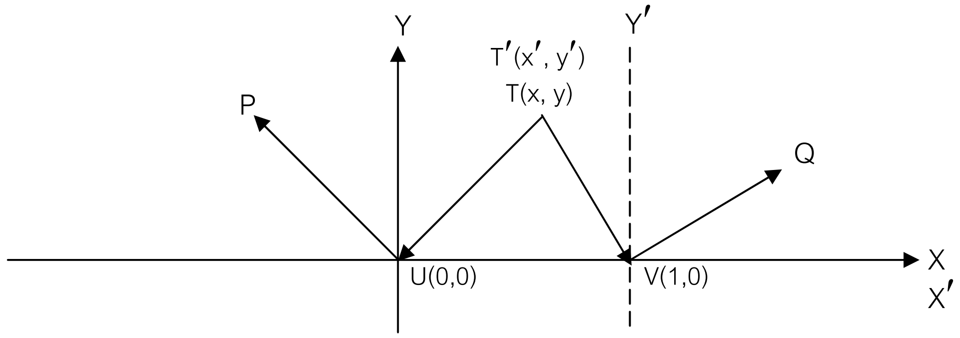
วิธีทำ : ให้ $z = \cos\theta + i\sin\theta$ แล้ว

$$\begin{aligned}
|1-z| &= |1-\cos\theta - i\sin\theta| \\
&= \sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} \qquad = \sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{2-2\cos\theta} \ = \ \sqrt{2(1-\cos\theta)} \ = \ \sqrt{2(1-(1-2\sin\frac{\theta}{2}))} \\
&= \sqrt{2(2\sin^2\frac{\theta}{2})} \ = \ \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \ = \ 2\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

แต่ $\theta = \arg z$ ดังนั้น $\quad |1-z| \ = \ 2\sin\left(\frac{\arg(z)}{2}\right)$ #

3.1.6 ตัวอย่าง : โจรสลัดกลุ่มหนึ่งหาที่ซ่อนสมบัติบนเกาะแห่งหนึ่ง โดยใช้ต้นไม้ T และก้อนหิน 2 ก้อน U และ V เป็นเครื่องหมาย พวกเขาเริ่มต้นจากต้นไม้ T เดินไปยังก้อนหิน U แล้วเลี้ยวขวาเดินตรงไปจนได้ระยะทางเท่ากับ TU แล้วกำหนดตำแหน่งเป็นจุด P แล้วพวกเขาก็กลับมาตั้งต้นที่ต้นไม้ T อีกครั้งหนึ่ง คราวนี้เดินไปยังก้อนหิน V แล้วเลี้ยวซ้าย เดินตรงไปจนได้ระยะทางเท่ากับ TV แล้วกำหนดเป็นจุด Q พวกเขาก็ฝังสมบัติไว้ที่จุดกึ่งกลางของระยะทาง PQ หนึ่งปีต่อมากลุ่มโจรสลัดได้กลับมาที่เกาะนี้เพื่อขุดสมบัติแต่ปรากฏว่าต้นไม้ T ได้หายไป โจรคนหนึ่งในกลุ่ม จึงได้กำหนดต้นไม้ต้นหนึ่งขึ้นแทน แล้วดำเนินวิธีการเช่นเดียวกับตอนที่ฝังสมบัติ เราจะประยุกต์ความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน วิเคราะห์ว่าโจรกลุ่มนี้จะพบสมบัติหรือไม่

วิธีทำ : กำหนดแกน X และแกน Y ตั้งฉากกันที่ก้อนหิน U และกำหนดระยะทาง UV เท่ากับ 1 หน่วย แล้ว U มีพิกัด (0, 0) และ V มีพิกัด (1, 0) ในระนาบ ให้ต้นไม้ T เป็นจุด (x, y) ใด ๆ แล้วพิจารณา $T = x + iy$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และจากต้นไม้ T เมื่อเดินไปยังก้อนหิน U แล้วเลี้ยวขวาไปที่จุด P แสดงว่า TU ตั้งฉากกับ UP ดังนั้นจุด P ได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อน T ด้วย i นั่นคือ $P \ = \ iT \ = \ -y + ix$ และจากต้นไม้ T เดินไปยังก้อนหิน V แล้วเลี้ยวซ้ายไปยังจุด Q แสดงว่า TV ตั้งฉากกับ QV ดังรูปที่ 3.1.8



รูปที่ 3.1.8

ในการหาจุด Q เราต้องกำหนดแกนใหม่ โดยให้เป็นแกน X' และแกน Y' มีจุดกำเนิดอยู่ที่ $V(1,0)$ และให้พิกัดของจุด T ในระบบแกน $X'Y'$ คือ (x', y') ซึ่งคือจำนวนเชิงซ้อน $T' = x' + iy'$ แล้วจุด Q จะได้จากการคูณ T' ด้วย $-i$ ทำให้ได้ $Q = (-i)T' = y' - ix'$

เนื่องจากระบบแกน $X'Y'$ ได้จากการย้ายระบบแกน XY อย่างขนาน โดยที่ $X' = X-1$ และ $Y' = Y$ เราจะได้ $Q = (Y', -X') = (Y+1, X-1)$ และโจรสลัดฝังสมบัติไว้ที่จุดกึ่งกลางของระยะ PQ ดังนั้นสมบัติอยู่ที่จุด $\left(\frac{-y+y+1}{2}, \frac{x+1-x}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และเพราะจุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ที่ได้นี้ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของต้นไม้ T แสดงว่าในการหาสมบัติ เราจะใช้ต้นไม้ T ต้นใดก็ได้ ดังนั้นโจรกลุ่มนี้พบสมบัติอย่างแน่นอน #

3.1.7 **ตัวอย่าง** : จงแสดงว่า $|1+iz| = |1-iz|$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ : ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

$$
\begin{aligned}
|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \\
&\Leftrightarrow (1+iz)\overline{(1+iz)} = (1-iz)\overline{(1-iz)} \quad (\text{เนื่องจาก } z\bar{z} = |z|^2) \\
&\Leftrightarrow (1+iz)\left(\bar{1}+\overline{iz}\right) = (1-iz)\left(\bar{1}-\overline{iz}\right) \quad (\text{เนื่องจาก } \overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}) \\
&\Leftrightarrow (1+iz)\left(\bar{1}+\overline{\overline{iz}}\right) = (1-iz)\left(\bar{1}-\overline{\overline{iz}}\right) \quad (\text{เนื่องจาก } \bar{\bar{z}} = z) \\
&\Leftrightarrow (1+iz)\left(1-i\bar{z}\right) = (1-iz)\left(1+i\bar{z}\right) \\
&\Leftrightarrow 1+iz-i\bar{z}+z\bar{z} = 1-iz+i\bar{z}+z\bar{z} \\
&\Leftrightarrow i\left(z-\bar{z}\right) = -i\left(z-\bar{z}\right) \\
&\Leftrightarrow 2i\left(z-\bar{z}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow z-\bar{z} = 0 \\
&\Leftrightarrow z = \bar{z} \\
&\Leftrightarrow z \text{ เป็นจำนวนจริง}
\end{aligned}
$$

#

3.2 การประยุกต์เพื่อหาผลบวกสัมประสิทธิ์ทวินามและตรีโกณมิติ

ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงการประยุกต์ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ร่วมกับทฤษฎีบททวินาม ในการสร้างเอกลักษณ์ในรูปจำนวนเชิงการนับ จึงขอกล่าวถึงทฤษฎีบททวินาม พร้อมบทพิสูจน์เสียก่อนดังนี้

3.2.1 **ทฤษฎีบททวินาม** (Binomial Theorem) :

ถ้า A และ B เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

โดยที่ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $k \le n$ และเรียก $\binom{n}{k}$ ว่า **จำนวนเชิงการนับ** (combinatorial number)

บทพิสูจน์ : เราจะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

สำหรับ $n \in N$ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

ขั้นฐาน : โดยความหมายของจำนวนเชิงการนับ จะได้ $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ ทำให้ได้

$$(A+B)^1 = A+B = 1\cdot A + 1\cdot B = \binom{1}{0}A + \binom{1}{1}B$$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in N$ ซึ่ง P(k) เป็นจริง นั่นคือ

$$(A+B)^k = \binom{k}{0}A^k + \binom{k}{1}A^{k-1}B + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^{k-1} + \binom{k}{k}B^k \qquad \text{.........(1)}$$

แล้วคูณ (1) ด้วย A และ B จะได้สมการ (2) และ (3) ตามลำดับดังนี้

$$A(A+B)^k = \binom{k}{0}A^{k+1} + \binom{k}{1}A^kB + \cdots + \binom{k}{k-1}A^2B^{k-1} + \binom{k}{k}AB^k \qquad \text{.........(2)}$$

$$B(A+B)^k = \binom{k}{0}A^kB + \binom{k}{1}A^{k-1}B^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^k + \binom{k}{k}B^{k+1} \qquad \text{.........(3)}$$

เมื่อนำสมการ (2) และ (3) มารวมกันจะได้

$$(A+B)(A+B)^k = \binom{k}{0}A^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]A^kB + \cdots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]AB^k + \binom{k}{k}B^{k+1}$$

$$\text{.........(4)}$$

แต่ละสำหรับจำนวนเต็มบวก n และ k ซึ่ง $0 < k \le n$ จะได้ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

และ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ ทำให้เขียนสมการ (4) ได้ใหม่ดังนี้

$$(A+B)^{k+1} = \binom{k+1}{0}A^{k+1} + \binom{k+1}{1}A^kB + \cdots + \binom{k+1}{k}AB^k + \binom{k+1}{k+1}B^{k+1}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n \quad \text{ทุกจำนวน } n \in N$$ ❐

ต่อไปเราจะประยุกต์ทฤษฎีบททวินามร่วมกับทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์เพื่อหาผลบวกในเทอมของจำนวนเชิงการนับ

3.2.1 ตัวอย่าง : โดยการแทน $a = 1$ และ $b = i$ ในทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้

$$\begin{aligned}
(1+i)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \binom{n}{3}i^3 + \ldots \binom{n}{n}i^n \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3}i + \ldots \binom{n}{n}i^n \\
&= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots\right] + \left[\binom{n}{1}i - \binom{n}{3}i + \binom{n}{5}i - \binom{n}{7}i + \ldots\right] \\
&= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots\right] + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots\right] i
\end{aligned}$$

…………(1)

และโดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ เราจะได้

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) เมื่อเปรียบเทียบส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวกัน ทำให้ได้เอกลักษณ์ (3) และ (4) ต่อไปนี้

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

และ

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ถ้าแทน $a = b = 1$ และ แทน $a = b = -1$ ในทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้เอกลักษณ์ (5) และ (6) ตามลำดับต่อไปนี้

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots \binom{n}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

และ $$(1-1)^n = 0 = \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\binom{n}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(6)$$

เมื่อนำเอกลักษณ์ (5) กับ (6) มารวมกัน จะได้เอกลักษณ์ (7) ดังต่อไปนี้

$$2^n = 2\binom{n}{0}+2\binom{n}{2}+2\binom{n}{4}+2\binom{n}{6}+\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(7)$$

เมื่อนำสมการ (2) คูณด้วย 2 จะได้เอกลักษณ์ (8) ดังต่อไปนี้

$$2\binom{n}{0}-2\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-2\binom{n}{6}+\ldots = 2\sqrt{2}^n\cos\frac{\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(8)$$

เมื่อนำสมการ (7) บวกกับ (8) จะได้ เอกลักษณ์ (9) ดังต่อไปนี้

$$4\binom{n}{0}+4\binom{n}{4}+4\binom{n}{8}+4\binom{n}{12}+\ldots = 2^n+2\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}$$

หรือก็คือ $$4\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\ldots\right] = 2^n+2\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}$$

ทำให้ได้ $$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\ldots = \frac{1}{4}\left[2^n+2\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{2^n}{2^2}+\frac{2\sqrt{2}^n}{2^2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\ldots = 2^{n-2}+\sqrt{2}^{n-2}\cos\frac{n\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

เมื่อนำสมการ (4) คูณด้วย 2 จะได้เอกลักษณ์ (10) ดังต่อไปนี้

$$2\binom{n}{1}-2\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-2\binom{n}{7}+\ldots = 2\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(10)$$

เมื่อนำสมการ (5) ลบออกด้วย (6) จะได้เอกลักษณ์ (11) ดังต่อไปนี้

$$2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+2\binom{n}{5}+2\binom{n}{7}+\ldots = 2^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

เมื่อนำการ (10) รวมกับด้วย (11) จะได้ เอกลักษณ์ (12) ดังต่อไปนี้

$$4\binom{n}{1}+4\binom{n}{5}+4\binom{n}{9}+4\binom{n}{13}+\ldots = 2^n+2\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}$$

หรือ $$4\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\ldots\right] = 2^n+2\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}$$

จะได้ $$\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\ldots = \frac{1}{4}\left[2^n+2\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{2^n}{2^2}+\frac{2\sqrt{2}^n}{2^2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $$\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\ \ldots = 2^{n-2}+\sqrt{2}^{n-2}\sin\frac{n\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

เมื่อนำสมการ (7) ลบด้วย (8) จะได้เอกลักษณ์ (13) ดังต่อไปนี้

$$4\binom{n}{2}+4\binom{n}{6}+4\binom{n}{10}+4\binom{n}{14}+\ldots = 2^n-2\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}$$

หรือ $$4\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\binom{n}{14}+\ldots\right] = 2^n-2\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}$$

จะได้ $$\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\binom{n}{14}+\ldots = \frac{1}{4}\left[2^n-2\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{2^n}{2^2}-\frac{2\sqrt{2}^n}{2^2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $$\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\binom{n}{14}+\ldots = 2^{n-2}-\sqrt{2}^{n-2}\cos\frac{n\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

เมื่อนำสมการ (11) ลบด้วย (10) จะได้ เอกลักษณ์ (14) ดังต่อไปนี้

$$4\binom{n}{3}+4\binom{n}{7}+4\binom{n}{11}+4\binom{n}{15}+\ldots = 2^n-2\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}$$

หรือ $$4\left[\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\binom{n}{15}+\ldots\right] = 2^n-2\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}$$

จะได้ $$\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\binom{n}{15}+\ldots = \frac{1}{4}\left[2^n-2\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{2^n}{2^2}-\frac{2\sqrt{2}^n}{2^2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $$\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\binom{n}{15}+\ldots = 2^{n-2}-\sqrt{2}^{n-2}\sin\frac{n\pi}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14) \qquad \#$$

ตัวอย่างต่อไปเราจะแสดงการประยุกต์ทฤษฎีบททวินามร่วมกับทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์เพื่อหาเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

3.2.2 ตัวอย่าง : จะพิสูจน์ว่าถ้า θ เป็นจำนวนจริงแล้ว

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

และ

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

บทพิสูจน์ : โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์และทฤษฎีบททวินาม ทำให้ได้ว่า

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$$

(โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์)

$$= \cos^5\theta + 5\cos^4\theta(i\sin\theta) + 10\cos^3\theta(i\sin\theta)^2 + 10\cos^2\theta(i\sin\theta)^3 + 5\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5$$

(โดยทฤษฎีบททวินาม)

$$= \cos^5\theta + i\,5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - i10\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin\theta + i\sin^5\theta$$

$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin\theta + i[5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta]$$

แต่ทั้งสองข้างของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนเดียวกัน เราจึงได้ว่า

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

และ

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \qquad \#$$

สำหรับกรณีทั่วไปเราอาจดำเนินวิธีการของตัวอย่าง 3.2.3 สำหรับการหาเอกลักษณ์ $\cos n\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

3.2.3 ตัวอย่าง : $\cos n\theta$ และ $\sin n\theta$ เมื่อ $n \in N$ ในเทอมของ $\cos\theta$ และ $\sin\theta$

วิธีทำ : จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ และ ทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$\cos n\theta + \sin n\theta = (\cos\theta + \sin\theta)^n$$

$$= \binom{n}{0}\cos\theta + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta) + \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2 + \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta(i\sin\theta)^3 + \ldots$$

$$= \cos^n\theta + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta - i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \ldots$$

$$= \left[\binom{n}{0}\cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \binom{n}{6}\cos^{n-1}\theta\sin^6\theta + \ldots\right] + i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \ldots\right]$$

จากสมการจะได้ว่า ส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ ดังนั้น

$$\cos n\theta = \binom{n}{0}\cos^{n}\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-1}\theta\sin^{2}\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^{4}\theta - \binom{n}{6}\cos^{n-6}\theta\sin^{6}\theta + \ldots$$

และ

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^{3}\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^{5}\theta - \binom{n}{7}\cos^{n-7}\theta\sin^{7}\theta + \ldots$$

#

3.3 การประยุกต์ในฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อนี้ เราจะประยุกต์จำนวนเชิงซ้อนช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยประยุกต์ร่วมกับเอกลักษณ์ที่ได้แสดงไว้ในหัวข้อ 3.2 ซึ่งจะแสดงให้เห็นดังตัวอย่างต่อไปนี้

3.3.1 **ตัวอย่าง** : จงหาผลบวกของ S_1 กับ S_2 เมื่อกำหนด

$$S_1 = \sin\theta + \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta+2\alpha) + \sin(\theta+3\alpha) + \ldots + \sin(\theta+n\alpha)$$

และ

$$S_2 = \cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta+2\alpha) + \cos(\theta+3\alpha) + \ldots + \cos(\theta+n\alpha)$$

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n และจำนวนจริง θ และ α

วิธีทำ : กำหนดให้ $\theta = 2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และให้ $S = S_2 + iS_1$ แล้ว

$$\begin{aligned}
S &= S_2 + iS_1 \\
&= \cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta+2\alpha) + \cos(\theta+3\alpha) + \ldots + \cos(\theta+n\alpha) \\
&\quad + i[\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta+2\alpha) + \sin(\theta+3\alpha) + \ldots + \sin(\theta+n\alpha)] \\
&= [\cos\theta + i\sin\theta] + [\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)] + [\cos(\theta+2\alpha) + i\sin(\theta+2\alpha)] + \\
&\quad [\cos(\theta+3\alpha) + i\sin(\theta+3\alpha)] + \ldots + [\cos(\theta+n\alpha) + i\sin(\theta+n\alpha)] \\
&= \cos\theta + i\sin\theta + [\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha + \cos\theta i\sin\alpha + i\sin\theta\cos\alpha] \\
&\quad + [\cos\theta\cos 2\alpha - \sin\theta\sin 2\alpha + \cos\theta i\sin 2\alpha + i\sin\theta\cos 2\alpha] \\
&\quad + [\cos\theta\cos 3\alpha - \sin\theta\sin 3\alpha + \cos\theta i\sin 3\alpha + i\sin\theta\cos 3\alpha] + \ldots \\
&\quad + [\cos\theta\cos n\alpha - \sin\theta\sin n\alpha + \cos\theta i\sin n\alpha + i\sin\theta\cos n\alpha] \\
&= \cos\theta + i\sin\theta + [\cos\theta\cos\alpha + i\sin\theta i\sin\alpha + \cos\theta i\sin\alpha + i\sin\theta\cos\alpha] \\
&\quad + [\cos\theta\cos 2\alpha + i\sin\theta i\sin 2\alpha + \cos\theta i\sin 2\alpha + i\sin\theta\cos 2\alpha] \\
&\quad + [\cos\theta\cos 3\alpha + i\sin\theta i\sin 3\alpha + \cos\theta i\sin 3\alpha + i\sin\theta\cos 3\alpha] + \ldots \\
&\quad + [\cos\theta\cos n\alpha + i\sin\theta i\sin n\alpha + \cos\theta i\sin n\alpha + i\sin\theta\cos n\alpha]
\end{aligned}$$

แต่ $S = [\cos\theta + i\sin\theta] + [\cos\theta(\cos\alpha + i\sin\alpha) + i\sin\theta(\cos\alpha + i\sin\alpha)]$
$+ [\cos\theta(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + i\sin\theta(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)]$
$+ [\cos\theta(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + i\sin\theta(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)] + \ldots$
$+ [\cos\theta(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + i\sin\theta(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)]$

$$= [\cos\theta + i\sin\theta] + [\cos\theta + i\sin\theta][\cos\alpha + i\sin\alpha] + [\cos\theta + i\sin\theta][\cos\alpha + i\sin\alpha]^2 + [\cos\theta + i\sin\theta][\cos\alpha + i\sin\alpha]^3 + \ldots + [\cos\theta + i\sin\theta][\cos\alpha + i\sin\alpha]^n \quad \ldots\ldots(1)$$

เมื่อแทนค่า $a = \cos\theta + i\sin\theta$ และ $b = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}$ ในสมการ (1) จะได้ว่า

$$S = a + ab^2 + ab^4 + \ldots + ab^{2n} = a\left(1 + b^2 + b^4 + \ldots + b^{2n}\right) = a\left(\frac{b^{2(n+1)} - 1}{b - 1}\right)$$

$$= \frac{ab^{n+1}}{b}\left(\frac{b^{n+1} - b^{-n-1}}{b - b^{-1}}\right) = ab^n \cdot \frac{b}{b}\left(\frac{b^{n+1} - b^{-n-1}}{b - b^{-1}}\right) = ab^n\left(\frac{b^{n+1} - b^{-n-1}}{b - b^{-1}}\right)$$

และจากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ว่า

$$ab^n = (\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$b^n - b^{-n-1} = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-1} = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$= 2i\sin\frac{\alpha}{2}$$

และ $b^{n+1} - b^{-n-1} = \cos\frac{(n+1)\alpha}{2} + i\sin\frac{(n+1)\alpha}{2} - \cos\frac{(n+1)\alpha}{2} + i\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$
$$= 2i\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$$

ดังนั้น $S = \left[\cos\left(\theta + \frac{n\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{n\alpha}{2}\right)\right]\left[\frac{2i\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}\right]$

$$= \left[\cos\left(\theta + \frac{n\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{n\alpha}{2}\right)\right]\left[\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$= \cos\left(\theta + \frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + i\sin\left(\frac{\theta + n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

แต่ $S = S_2 + iS_1$ ดังนั้น

$$S_1 \;=\; \sin\left(\frac{\theta+n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{และ} \qquad S_2 \;=\; \cos\left(\theta+\frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad \#$$

3.4 การประยุกต์กับพหุนาม

เราสามารถประยุกต์จำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงได้ ดังจะแสดงตัวอย่างให้เห็นในหัวข้อนี้

3.4.1 **ตัวอย่าง** : จะแสดงว่า $\sin\frac{\pi}{14}$ เป็นรากของสมการพหุนาม $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \;=\; 0$

วิธีทำ : ให้ $x = \sin\frac{\pi}{14}$ แล้ว $1 - x^2 \;=\; 1 - \sin^2\frac{\pi}{14} \;=\; \cos^2\frac{\pi}{14}$ แล้วโดยการประยุกต์ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ร่วมกับทฤษฎีบททวินาม เราจะได้

$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \;=\; (\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14})^7 \qquad \text{(โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์)}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^7\frac{\pi}{14} + i(7\cos^6\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{\pi}{14}) - 21\cos^5\frac{\pi}{14}\sin^2\frac{\pi}{14} - i(35\cos^4\frac{\pi}{14}\sin^3\frac{\pi}{14}) \\ &\quad + 35\cos^3\frac{\pi}{14}\sin^4\frac{\pi}{14} + i(21 \quad \sin^5\frac{\pi}{14}) \\ &\quad - 7\cos\frac{\pi}{14}\sin^6\frac{\pi}{14} - i\sin^7\frac{\pi}{14} \end{aligned}$$

(โดยทฤษฎีบททวินาม)

และทำให้ได้

$$\begin{aligned} 1 \;=\; \sin\frac{\pi}{2} &= 7\cos^6\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14} - 35\cos^4\frac{\pi}{14}\sin^3\frac{\pi}{14} + 21\cos^2\frac{\pi}{14}\sin^5\frac{\pi}{14} - \sin^7\frac{\pi}{14} \\ &= 7(\cos^2\frac{\pi}{14})^3\sin\frac{\pi}{14} - 35(\cos^2\frac{\pi}{14})^2\sin^3\frac{\pi}{14} + 21\cos^2\frac{\pi}{14}\sin^5\frac{\pi}{14} - \sin^7\frac{\pi}{14} \\ &= 7(1-x^2)^3x - 35(1-x^2)^2x^3 + 21(1-x^2)x^5 - x^7 \\ &= 7x(1-3x^2+3x^4-x^6) - 35x^3(1-2x^2+x^4) + 21x^5(1-x^2) - x^7 \\ &= 7x - 21x^3 + 21x^5 - 7x^7 - 35x^3 + 70x^5 - 35x^7 + 21x^5 - 21x^7 - x^7 \\ &= -64x^7 + 112x^5 - 56x^3 + 7x \end{aligned}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$\begin{aligned} 0 &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 \\ &= (x+1)(64x^6 - 64x^5 - 48x^4 + 48x^3 + 8x^2 - 8x + 1) \\ &= (x+1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2 \end{aligned}$$

แต่ $x = \sin\frac{\pi}{14} \neq -1$ ดังนั้น $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \;=\; 0$ ซึ่งแสดงว่า $x = \sin\frac{\pi}{14}$ เป็นรากของสมการ $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \;=\; 0$ ตามต้องการ #

3.4.2 ตัวอย่าง : จงแสดงว่าถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งไม่เป็นพหุคูณของ 2 หรือ 3 แล้วพหุนาม $G(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม

$$F(x) = \binom{n}{1}x^{n-2} + \binom{n}{2}x^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n-2}x + \binom{n}{n-1}$$

วิธีทำ : ขั้นแรกเราจะหารากของพหุนาม G(x) ก่อน เนื่องจาก $G(-1) = 0$ ดังนั้น G(x) ถูกหารลงตัวด้วย x + 1 และทำให้ได้ว่า $G(x) = (x+1)(x^2+x+1)$ แต่ $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ เป็นรากของ $x^2 + x + 1 = 0$ ดังนั้นรากของพหุนาม G(x) คือ - 1 , $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ และ $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

ถ้าเราแสดงได้ว่า รากทั้งสามของ G(x) เป็นรากของ F(x) ด้วย เราจะได้ว่ามีพหุนาม H(x) ซึ่ง $F(x) = (x+1)(x^2+x+1)H(x) = G(x)H(x)$ และนั่นแสดงว่า G(x) เป็นตัวประกอบของ F(x)

สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม n > 1 โดยทฤษฎีบททวินามเราจะได้ว่า $F(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\left[(x+1)^n - x^n - 1\right]$ แล้ว $F(-1) = -[0^n - (-1)^n - 1] = 0$ เพราะ n เป็นจำนวนคี่ (n ไม่หารลงตัวด้วย 2) และสำหรับค่าของพหุนาม F(x) ที่ $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ และ $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ สามารถคำนวณไปพร้อม ๆ กันได้ดังนี้

$$F\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{-1 \pm i\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 1\right]$$

จากทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ ทำให้ได้ว่า

$$\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right]^n - \left[\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right]^n$$

$$= \cos\frac{n\pi}{3} \pm i\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3} \mp i\sin\frac{2n\pi}{3}$$

และโดยความจริงที่ว่า n ไม่เป็นพหุคูณของ 2 หรือ 3 จะมี $k \in N$ ซึ่งทำให้ $n = 6k \pm 1$ (ดูนิยามในภาคผนวก 8) ทำให้ได้

$$\sin\frac{n\pi}{3} = \sin\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(4k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2n\pi}{3} ,$$

$$\cos\frac{n\pi}{3} = \cos\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} ,$$

และ $\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\left(4k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

ทำให้ได้ว่า

$$F\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\frac{\cos\frac{n\pi}{3} \pm i\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3} \pm i\sin\frac{2n\pi}{3} - 1}{1\pm i\sqrt{3}} = 0 \qquad \#$$

3.4.4 ตัวอย่าง : ให้ $n \in N$ และ $\alpha \in R$ เมื่อ $n > 1$ และ $\sin\alpha \neq 0$ จงแสดงว่าพหุนาม $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ หารพหุนาม $P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ ลงตัว

วิธีทำ : เราจะแสดงก่อนว่า $Q(x)$ มีราก $x_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ ซึ่ง

$$P(x_{1,2}) = (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n \sin\alpha - (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

ถ้าเราประยุกต์ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์รกับ $(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha$

ทำให้เราได้ว่า

$$P(x_1) = P(x_2) = \cos n\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

จากเอกลักษณ์ที่ว่า $\sin(n-1)\alpha = \cos\alpha\sin n\alpha - \cos n\alpha\sin\alpha$

เราสามารถประยุกต์ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ สำหรับทั้งสองข้างของสมการ

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n-1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-1}$$

และจากสมการของส่วนจินตภาพ จะได้ว่า

$P(x_{1,2}) = 0$ นั่นคือ $Q(x)$ หาร $P(x)$ ลงตัว #

บทที่ 4
การประยุกต์ของรากปฐมฐาน
(Applications of roots of Unity)

ในบทนี้ เราจะกล่าวถึงรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน การหารากหรือคำตอบของสมการ $Z^n = W$ เมื่อ Z และ W เป็นจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากของ 1 และการประยุกต์รากปฐมฐาน

4.1 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

เราสังเกตว่าถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วกำลังที่ n ของ z จะมีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $|z|^n$ และอาร์กิวเมนต์จะเป็น n เท่าของอาร์กิวเมนต์ของ z ดังนั้นถ้า w เป็นจำนวนเชิงซ้อนคงค่าซึ่งเขียนได้ในรูปแบบเชิงขั้วเป็น $w = R\text{cis}\theta$ และให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $\sqrt[n]{R}$ และอาร์กิวเมนต์ เท่ากับ $\frac{\theta}{n}$ นั่นคือ

$$z = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

แล้ว $z^n = \left(\sqrt[n]{R}\right)^n\left(\cos\frac{n\theta}{n} + i\sin\frac{n\theta}{n}\right) = R(\cos\theta + i\sin\theta) = w$

แสดงว่า $z = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$ เป็นรากตัวหนึ่งของสมการ $z^n = w$

เราเรียกรากหรือคำตอบของสมการ $z^n = w$ ว่า**รากที่ n (nth root)** ของ w

4.1.1 ตัวอย่าง : จะหารากที่ 3 ของ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

วิธีทำ : ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปแบบเชิงขั้วของรากที่ 3 ของ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ แล้ว

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

และโดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ เราจะได้

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ทำให้ได้ $r^3 = \sqrt{2}$ และ $3\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ดังนั้น

$$r = 2^{\frac{1}{6}} \text{ และ } \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ} \qquad \text{........................ (1)}$$

และหากเราอยากทราบรากที่ 3 ของ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ตัวหนึ่ง เราต้องแทนค่าเฉพาะ n ใน (1) และง่ายที่สุดคือการแทนค่า n ด้วย 0 ซึ่งจะได้รากตัวหนึ่งคือ

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

และถ้าแทนค่า n ด้วย 1 เราจะได้รากตัวที่ 2 คือ

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

และถ้าแทนค่า n ด้วย 2 เราจะได้รากตัวที่ 3 คือ

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

เราสังเกตว่า z_0, z_1 และ z_2 จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด (0, 0) และรัศมีเท่ากับ $2^{\frac{1}{6}}$ หน่วย นอกจากนี้ $\frac{2\pi}{3}$ คือ 1 ส่วนใน 3 ส่วนของเส้นรอบวงกลมดังกล่าว ซึ่งแสดงว่า z_0, z_1 และ z_2 วางตัวในระยะห่างเท่า ๆ กันบนเส้นรอบวงของวงกลม ทำให้เราทราบว่าถ้าแทนจำนวน n ด้วยจำนวนเต็มอื่น ๆ อีกก็จะได้จำนวนเชิงซ้อนซึ่งสามารถแทนได้ด้วยจุด 3 จุดซึ่งเป็นชุดเดียวกันกับ $\{z_0, z_1, z_2\}$ ดังนั้นรากที่ 3 ของ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ จึงมีที่แตกต่างกันทั้งหมดเพียง 3 รากที่แสดงไว้ข้างต้นเท่านั้น #

ในกรณีทั่วไปถ้า z_1 เป็นรากที่ n ตัวหนึ่งของจำนวนเชิงซ้อนคงค่า w แล้วเราสามารถหารากที่ n ตัวต่อไปของ w ได้ด้วยการใช้ค่าสัมบูรณ์ของ z_1 และบวกอาร์กิวเมนต์ของ z_1 ด้วย $\frac{2\pi}{n}$ เพราะถ้า $z_1 = r\text{cis}\theta_1$ เป็นรากที่ n ตัวหนึ่งของ w และให้ $z_2 = r\text{cis}\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{n}\right)$ แล้ว

$$z_2^n = r^n\text{cis}\left[n\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] = r^n\text{cis}(n\theta_1 + 2\pi) = r^n\text{cis}(n\theta_1) = z_1^n = w$$

ซึ่งแสดงว่า z_2 เป็นรากที่ n อีกตัวหนึ่งของ w ดังนั้นเราสามารถหารากที่ n ของ w ได้ด้วยการบวกอาร์กิวเมนต์ของรากที่ n ของ w ตัวที่ทราบมาก่อนครั้งละ $\frac{2\pi}{n}$ จะทำให้เราได้รากที่ n ของ w ที่แตกต่างกันทั้งหมดอย่างน้อย n ราก

ให้ $w = R\text{cis}\theta$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนคงค่า แล้วรากที่ n ของ w ที่แตกต่างกันอย่างน้อย n ราก มีดังต่อไปนี้

$$z_0 = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

$$z_2 = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+2\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right],$$

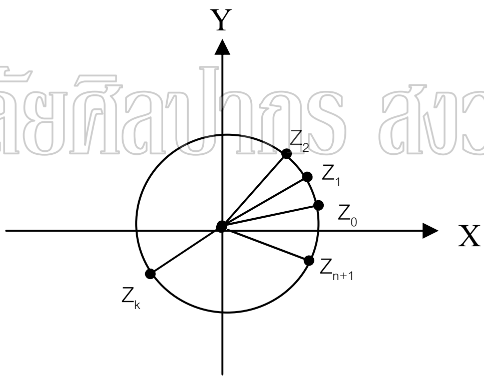
. . .

และ
$$z_{n-1} = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right]$$

หรือเขียนได้ในรูปทั่วไปดังนี้

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)+k\frac{2\pi}{n}\right] \qquad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

ขอให้สังเกตว่า รากที่ n ของ $w = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ ทั้ง n รากดังกล่าวข้างต้น อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มีรัศมี $\sqrt[n]{R}$ หน่วยและห่างกันด้วยความกว้างของมุมวัดที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$ เท่า ๆ กัน ดังรูป 4.1.1



รูปที่ 4.1.1

ต่อไปเราจะแสดงว่าไม่มีรากที่ n ของ $w = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ ที่นอกเหนือจาก n รากที่กล่าวไว้คือ

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)+k\frac{2\pi}{n}\right] \qquad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดยสมมติให้ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\text{cis}\varphi$ เป็นรูปแบบเชิงขั้วของรากที่ n ของ w แล้วโดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ เราจะได้

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n\text{cis}n\varphi = R(\cos\theta + i\sin\theta) = w$$

ดังนั้น $r^n = R$ หรือ $r = \sqrt[n]{R}$ และ $n\varphi = \theta + 2k\pi$ หรือ $\varphi = \frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$ โดยที่ $k \in Z$ แต่โดยขั้นตอนการหาร (ภาคผนวก 1) สำหรับจำนวนเต็มบวก n และจำนวนเต็ม k เราจะมีจำนวนเต็ม q และ s เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $k = nq + s$ โดยที่ $0 \leq s < n$ ซึ่งทำให้ได้

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2(nq+s)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2s\pi}{n} + 2q\pi$$

ดังนั้น φ จึงเป็นมุมสมมูลกับ $\frac{\theta}{n} + \frac{2s\pi}{n}$ โดยที่ $0 \leq s < n$ ซึ่งแสดงว่า

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2s\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right) + \frac{2s\pi}{n}\right]$$

เป็นตัวใดตัวหนึ่งของ $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ ที่กล่าวมาข้างต้น

เราจึงสรุปว่ารากของสมการ $z^n = w$ มีที่แตกต่างกันทั้งหมด n รากคือ

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right) + k\frac{2\pi}{n}\right] \qquad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

4.1.2 **ตัวอย่าง** : จะหารากที่ 3 ทั้งหมดของ - 8i

วิธีทำ : เราเริ่มต้นด้วยการเขียน - 8i ในรูปแบบเชิงขั้วได้เป็นดังนี้ $-8i = 8\text{ cis }\frac{3\pi}{2}$ แล้วสิ่งที่โจทย์ต้องการก็คือรากทั้งหมดของสมการ $z^3 = -8i$ ซึ่งมีอยู่ด้วยกันทั้งหมด 3 ราก ดังต่อไปนี้

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\text{cis}\frac{3\pi}{(3)2} = 2\text{cis}\frac{\pi}{2} = 2(0+i) = 2i \quad ,$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\text{cis}\frac{7\pi}{6} = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{3} - i$$

และ $$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$ #

4.1.3 **ตัวอย่าง** : จะหารากที่ 8 ทั้งหมดของ $-\sqrt{3} - i$

วิธีทำ : เราเริ่มต้นด้วยการเขียน $-\sqrt{3} - i$ ในรูปแบบเชิงขั้วได้เป็นดังนี้ $-\sqrt{3} - i = 2\text{ cis}\frac{7\pi}{6}$ แล้วสิ่งที่โจทย์ต้องการก็คือรากทั้งหมดของสมการ $z^8 = -\sqrt{3} - i$ ซึ่งมีอยู่ด้วยกันทั้งหมด 8 ราก ดังต่อไปนี้

$$z_0 = \sqrt[8]{2}\text{cis}\frac{7\pi}{8}$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\text{cis}\frac{19\pi}{48}$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{19\pi}{48} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\text{cis}\frac{31\pi}{48}$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{31\pi}{48} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\text{cis}\frac{43\pi}{48}$$

$$z_4 = \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{43\pi}{48} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\text{cis}\frac{55\pi}{48}$$

$$z_5 = \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{55\pi}{48} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\text{cis}\frac{67\pi}{48}$$

$$z_6 \;=\; \sqrt[8]{2}\,\text{cis}\left(\frac{67\pi}{48}+\frac{\pi}{4}\right) \;=\; \sqrt[8]{2}\,\text{cis}\,\frac{79\pi}{48}$$

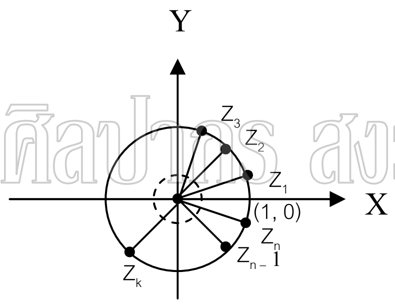
$$z_7 \;=\; \sqrt[8]{2}\,\text{cis}\left(\frac{79\pi}{48}+\frac{\pi}{4}\right) \;=\; \sqrt[8]{2}\,\text{cis}\,\frac{91\pi}{48} \qquad \#$$

4.2 รากปฐมฐาน

จำนวนที่เป็นรากที่ n ของ 1 มีกำเนิดขึ้นเมื่อเกาส์ต้องการหาเงื่อนไขของ n ที่จะทำให้เราสามารถวาดรูป n เหลี่ยมด้านเท่าได้โดยใช้เพียงไม้บรรทัดกับวงเวียนเท่านั้น ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงรากที่ n ของ 1 และและการประยุกต์รากที่ n ของ 1

เราเรียกจำนวนซึ่งเป็นรากของสมการ $x^n - 1 = 0$ ว่า **รากที่ n ของ 1** (the n^{th} root of unity) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **รากของ 1** (root of unity) และเรียกรากที่ n ของ 1 ซึ่งไม่ใช่ 1 ว่า **รากปฐมฐาน** (primitive n^{th} root of unity)

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะมีรากที่ n ของ 1 ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดอยู่ n ราก ได้แก่ $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}$ โดยที่ $\omega = \text{cis}\,\frac{2\pi}{n}$



รูปที่ 4.2.1

และโดยความหมายทางเรขาคณิต เราจะเห็นว่ารากที่ n ของ 1 เหล่านี้เป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่า (regular n polygon) ที่แนบในวงกลมหน่วย (unit circle) ซึ่งก็คือเซต $\{ z \in C \mid |z| = 1 \}$ โดยมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (1, 0) ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สมนัยกับจำนวนจริง 1 ดังรูปที่ 4.2.1

โดยผลของทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ ทำให้เราสามารถเขียนพหุนาม $x^n - 1$ ในรูปผลคูณของพหุนามเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังจะแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

4.2.1 ทฤษฎีบท : ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\omega = \text{cis}\,\frac{2\pi}{n}$ แล้ว

1. $x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$
2. ถ้า $x - 1 \neq 0$ แล้ว $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$
3. $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$

บทพิสูจน์ :

(1) โดยการหารากที่ n ของ 1 ด้วยกระบวนการดังที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 4.1 เราจะได้รากของ 1 ทั้งหมด n ราก ดังต่อไปนี้

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{เมื่อ} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

แล้ว $z_0 = 1$, $z_1 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$, $z_2 = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{n} = z_1^2, \ldots, z_{n-1} = \operatorname{cis}\frac{2(n-1)\pi}{n} = z_1^{n-1}$

ในที่นี้เราจะใช้สัญลักษณ์ $\omega = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$ ทำให้รากที่เหลือนอกเหนือจาก 1 และ ω คือ $\omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ เพราะฉะนั้นแต่ละพหุนามเชิงเส้นต่อไปนี้จะเป็นตัวประกอบของ $x^n - 1$ คือ

$$x-1\ ,\ x-\omega\ ,\ x-\omega^2, \ldots,\ x-\omega^{n-1}$$

และเพราะผลคูณของพหุนาม n พหุนามเหล่านี้เป็นพหุนามกำลัง n เราจึงได้

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$$

(2) ถ้าเราแยกตัวประกอบของ $x^n - 1$ โดยทฤษฎีบททวินามจะได้

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

และโดย (1) เราจะได้

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$$

หรือ $(x-1)[(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) - (x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})] = 0$

ดังนั้นถ้า $x - 1 \neq 0$ เราจะได้ $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = (x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$

(3) ถ้า $x - 1 \neq 0$ เราจะได้โดย (2) ว่า

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = (x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$$

และเมื่อแทน $x = \omega$ จะได้

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$$

❑

4.2.2 **ทฤษฎีบท** : ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ 0 และ y เป็นรากที่ n ของ z ตัวหนึ่ง ถ้า w เป็นรากปฐมฐานของ 1 แล้ว $y, wy, w^2y, \ldots, w^{n-1}y$ คือรากที่ n ของ z ที่แตกต่างกันทั้งหมด

บทพิสูจน์ : ให้ w เป็นรากปฐมฐานของ 1 และให้ $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ แล้ว

$$(w^j y)^n = (w^j)^n y^n = (w^n)^j z = z$$

ฉะนั้น $y, wy, w^2y, \ldots, w^{n-1}y$ เป็นรากที่ n ของ z

ถ้าเราแสดงได้ว่า $y, wy, w^2y, \ldots, w^{n-1}y$ แตกต่างกันทั้งหมด เราจะก็ได้ว่า

$y,\ wy,\ w^2y, \ldots,\ w^{n-1}y$

คือรากที่ n ของ z ทั้งหมด ให้ $j, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ โดยที่ $j < k$ และสมมติว่า $w^j y = w^k y$ แล้ว $w^j = w^k$ และ $w^{k-j} = 1$ เนื่องจาก $0 < k-j < n$ และ w เป็นรากปฐมฐานของ 1 ฉะนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่ $w^{k-j} = 1$ ดังนั้น $y, wy, w^2y, \ldots, w^{n-1}y$ คือรากที่ n ของ z ทั้งหมด ❑

4.3 การประยุกต์ของรากปฐมฐาน

รากปฐมฐานของ 1 ช่วยในการแยกตัวประกอบและพิสูจน์เอกลักษณ์ที่ประกอบด้วยพหุนามที่มีกำลังสูงหรือมีหลายตัวแปรหรือที่ยุ่งยากได้ นอกจากนี้จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากของ 1 เหล่านี้ยังมีสมบัติที่เอื้อประโยชน์ต่อการศึกษาวิชาพีชคณิต เรขาคณิตและทฤษฎีจำนวน ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงประโยชน์ดังกล่าวด้วยตัวอย่างต่าง ๆ

4.3.1 ตัวอย่าง : ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราต้องการหาผลบวกของ

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \ldots$$

วิธีทำ : ให้ $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ แล้ว $\varepsilon^6 = 1$ และเมื่อแทน $a = i$ และ $b = \varepsilon^k$ สำหรับ $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ในทฤษฎีบททวินาม จะได้

$$(1+\varepsilon^k)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^k + \binom{n}{2}\varepsilon^{2k} + \ldots + \binom{n}{n}\varepsilon^{nk} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ถ้า t เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง 6 หารไม่ลงตัว แล้ว $\varepsilon^t \neq 1$ และ $\varepsilon^6 = 1$ ทำให้ได้

$$1 + \varepsilon^t + \varepsilon^{2t} + \varepsilon^{3t} + \varepsilon^{4t} + \varepsilon^{5t} = \frac{\varepsilon^{6t} - 1}{\varepsilon^t - 1} = \frac{0}{\varepsilon^t - 1} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

แต่ถ้า t เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง 6 หารลงตัว แล้ว

$$1 + \varepsilon^t + \varepsilon^{2t} + \varepsilon^{3t} + \varepsilon^{4t} + \varepsilon^{5t} = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

เมื่อหาผลบวกของสมการ (1) สำหรับ $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้

$$\sum_{k=0}^{5}(1+\varepsilon^k)^n = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n}\right] + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \binom{n}{3}\varepsilon^3 + \ldots + \binom{n}{n}\varepsilon^n\right]$$
$$+ \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^2 + \binom{n}{2}\varepsilon^4 + \binom{n}{3}\varepsilon^6 + \ldots + \binom{n}{n}\varepsilon^{2n}\right]$$

$$+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\varepsilon^{3}+\binom{n}{2}\varepsilon^{6}+\binom{n}{3}\varepsilon^{9}+\ldots+\binom{n}{n}\varepsilon^{3n}\right]$$

$$+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\varepsilon^{4}+\binom{n}{2}\varepsilon^{8}+\binom{n}{3}\varepsilon^{12}+\ldots+\binom{n}{n}\varepsilon^{4n}\right]$$

$$+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\varepsilon^{5}+\binom{n}{2}\varepsilon^{10}+\binom{n}{3}\varepsilon^{15}+\ldots+\binom{n}{n}\varepsilon^{5n}\right]$$

$$= 6\binom{n}{0}+\left(1+\varepsilon+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{3}+\varepsilon^{4}+\varepsilon^{5}\right)\binom{n}{1}+\left(1+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{4}+\varepsilon^{6}+\varepsilon^{8}+\varepsilon^{10}\right)\binom{n}{2}$$

$$+\left(1+\varepsilon^{3}+\varepsilon^{6}+\varepsilon^{9}+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{15}\right)\binom{n}{3}+\left(1+\varepsilon^{4}+\varepsilon^{8}+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^{20}\right)\binom{n}{4}$$

$$+\left(1+\varepsilon^{5}+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{20}+\varepsilon^{25}\right)\binom{n}{5}+\ldots+\left(1+\varepsilon^{n}+\varepsilon^{2n}+\varepsilon^{3n}+\varepsilon^{4n}+\varepsilon^{5n}\right)\binom{n}{n}$$

โดยสมการที่ (2) จะได้

$$\sum_{k=0}^{5}(1+\varepsilon^{k})^{n} = 6\binom{n}{0}+0+0+0+0+0+6\binom{n}{6}+0+\;.\;.\;.\;+6\binom{n}{12}+\;.\;.\;.$$

$$= 6\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{6}+\binom{n}{12}+\binom{n}{18}+\;.\;.\;.\right] = 6S \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

และโดยการกระจายผลบวกโดยตรง จะได้

$$\sum_{k=0}^{5}\left(1+\varepsilon^{k}\right)^{n} = (1+1)^{n}+(1+\varepsilon)^{n}+\left(1+\varepsilon^{2}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{3}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{4}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{5}\right)^{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

แต่สมการ (3) คือสมการ (4) ทำให้ได้ว่า

$$6S = (1+1)^{n}+(1+\varepsilon)^{n}+\left(1+\varepsilon^{2}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{3}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{4}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{5}\right)^{n}$$

และได้

$$S = \frac{1}{6}\left[(1+1)^{n}+(1+\varepsilon)^{n}+\left(1+\varepsilon^{2}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{3}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{4}\right)^{n}+\left(1+\varepsilon^{5}\right)^{n}\right] \ldots\ldots\ldots(5)$$

แต่เราสามารถหารากที่ 6 ของ 1 ได้ทั้งหมด 6 ราก ดังนี้

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\;,\;\varepsilon^{2} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\;,$$

$$\varepsilon^{3} = \cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3} = -1\quad,\quad\varepsilon^{4} = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\;,$$

และ $\quad \varepsilon^5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

เมื่อแทนค่า ε , ε^2 , ε^3 , ε^4 , ε^5 ในสมการ (5) จะได้

$$S = \frac{1}{6}\left[2^n + \left(1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + (1-1)^n + \left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[2^n + \left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 0 + \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(6)$$

โดยใช้ทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์อีกครั้งใน (6) จะได้

$$\left(\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n = \sqrt{3}^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}\pm i\sin\frac{n\pi}{6}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(7)$$

และ $$\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left[\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right]^n = \cos\frac{n\pi}{3}\pm i\sin\frac{n\pi}{3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(8)$$

เมื่อแทน (7) และ (8) ในสมการ (6) จะได้

$$S = \frac{1}{6}\left[\ 2^n + \sqrt{3}^n\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right.$$
$$\left. + \sqrt{3}^n\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\ \right]$$

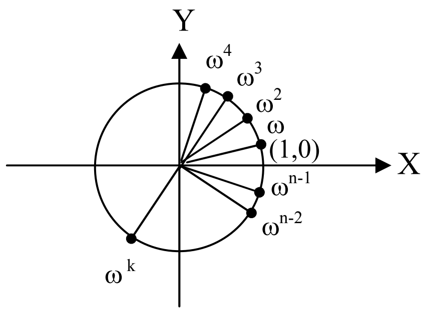
$$S = \frac{1}{6}\left[2^n + 2\sqrt{3}^n\cos\frac{n\pi}{6} + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right] = \frac{1}{6}\cdot 2\left[2^{n-1} + \sqrt{3}^n\cos\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[2^{n-1} + \sqrt{3}^n\cos\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{3}\right]$$

เพราะฉะนั้น $\binom{n}{0}+\binom{n}{6}+\binom{n}{12}+\ldots = \frac{1}{3}\left[2^{n-1} + \sqrt{3}^n\cos\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{3}\right]$ #

4.3.2 **ตัวอย่าง** : ต้องการหาผลคูณของเส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมหน่วย (เส้นทแยงมุมหมายถึงเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดยอดมุม 2 จุดใด ๆ รวมด้านด้วย)

วิธีทำ : เราสามารถกำหนดจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ที่แนบในวงกลมหน่วย ให้อยู่ ณ ตำแหน่งรากที่ n ของ 1 ทั้ง n ราก ดังรูปที่ 4.3.2



รูปที่ 4.3.2

เนื่องจากรากที่ n ของ 1 ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดมีอยู่ n ราก คือ $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}$ โดยที่ $\omega = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$ ดังนั้น

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1) = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$$

ทำให้ได้ $$(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1) = (x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1}) \qquad \ldots\ldots(1)$$

เมื่อแทน x = 1 ในสมการ (1) จะได้

$$(1^{n-1} + 1^{n-2} + 1^{n-3} + \ldots + 1 + 1) = (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})$$

ซึ่งทำให้ได้ $$1+1+1+\ldots+1+1 = n = (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})$$
$$= (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})$$

ดังนั้นผลคูณของเส้นทแยงมุม n – 1 เส้นของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมหน่วย จากจุด (1,0) ไปยังจุดอื่น ๆ $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}$ อีก n – 1 จุดเท่ากับ

$$|1-\omega||1-\omega^2||1-\omega^3||1-\omega^4| \ldots |1-\omega^{n-1}| = n \qquad \ldots\ldots(2)$$

และโดยสมมาตร ผลคูณจากจุดอื่น ๆ แต่ละจุดไปยังอีก n – 1 จุดจะเท่ากับ n ด้วย ดังนี้

$$|\omega-\omega^2||\omega-\omega^3||\omega-\omega^4| \ldots |\omega-1| = n \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$|\omega^2-\omega^3||\omega^2-\omega^4||\omega^2-\omega^5| \ldots |\omega^2-1| = n \qquad \ldots\ldots(4)$$

. . .

และ $$|\omega^{n-1}-1||\omega^{n-1}-\omega||\omega^{n-1}-\omega^2| \ldots |\omega^{n-1}-\omega^{n-2}| = n \qquad \ldots\ldots(n+1)$$

เมื่อนำทั้ง n สมการมาคูณกันจะได้

$$\begin{aligned} n^n = {} & |\omega-\omega^2||\omega-\omega^3||\omega-\omega^4| \ldots |\omega-1| \\ & |\omega^2-\omega^3||\omega^2-\omega^4||\omega^2-\omega^5| \ldots |\omega^2-1| \\ & \ldots |\omega^{n-1}-1||\omega^{n-1}-\omega||\omega^{n-1}-\omega^2| \ldots |\omega^{n-1}-\omega^{n-2}| \end{aligned}$$

$$n^n = (|\omega-\omega^2||\omega-\omega^3||\omega-\omega^4|\ .\ .\ .\ |\omega-1|$$
$$|\omega^2-\omega^3||\omega^2-\omega^4||\omega^2-\omega^5|\ .\ .\ .\ |\omega^{n-1}-\omega^{n-2}|)^2$$

ทำให้ได้

$$|\omega-\omega^2||\omega-\omega^3||\omega-\omega^4|\ .\ .\ .\ |\omega-1|\ |\omega^2-\omega^3||\omega^2-\omega^4||\omega^2-\omega^5|$$
$$|\omega^2-\omega^3||\omega^2-\omega^4||\omega^2-\omega^5|\ .\ .\ .\ |\omega^{n-1}-\omega^{n-2}| = \sqrt{n^n}$$

ดังนั้นผลคูณของเส้นทแยงมุมทั้งหมดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าในวงกลมหน่วย เท่ากับ $\sqrt{n^n}$ #

4.3.3 **ตัวอย่าง** : จะแสดงว่า $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1

วิธีทำ : โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ เราทราบว่าพหุนาม x^n-1 มีรากทั้งหมด n ราก ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ เมื่อ $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ นอกจากนี้

$$(x^n-1) = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)\ldots(x-\varepsilon^{n-1})$$

และ $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{n-1} = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)\ldots(x-\varepsilon^{n-1})$ ....(1)

เมื่อแทนค่า x = 1 แล้วในสมการ (1) จะได้

$$\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ ตัว}} = n = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)\ldots(1-\varepsilon^{n-1})$$
$$= |1-\varepsilon|\,|1-\varepsilon^2|\,|1-\varepsilon^3|\ldots|1-\varepsilon^{n-1}| \qquad \text{........(2)}$$

แต่ถ้า $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ แล้ว $\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ และได้ว่า

$$|1-\varepsilon^k| = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2} = \sqrt{1-2\cos\frac{2k\pi}{n}+\cos^2\frac{2k\pi}{n}+\sin^2\frac{2k\pi}{n}}$$
$$= \sqrt{1-2\cos\frac{2k\pi}{n}+1} = \sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt{2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}$$
$$= \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{k\pi}{n}} \qquad (\text{เมื่อ } 2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta)$$
$$= 2\sin\frac{k\pi}{n} \qquad \text{..........(3)}$$

เมื่อแทนค่า $1+\varepsilon^k$ สำหรับ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ ลงในสมการ (2) เราจะได้

$$\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(2\sin\frac{3\pi}{n}\right)\ldots\left(2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n$$

ซึ่งสมมูลกับ $$2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{3\pi}{n}\right)...\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \;=\; n$$

เพราะฉะนั้น $$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n} \;=\; \frac{n}{2^{n-1}}$$ #

4.3.4 ตัวอย่าง : สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะแสดงว่า

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+...+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1} \;=\; \frac{n(2n-1)}{3}$$

วิธีทำ : เราจะหาสมการดีกรี n ซึ่งมีรากที่แตกต่างทั้งหมด n ราก และสำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ ให้ $x_k = \cot^2\frac{k\pi}{2n+1}$

เราสามารถเขียน $\sin(2n+1)\alpha$ ให้อยู่ในเทอมของ $\sin\alpha$ และ $\cos\alpha$ ได้โดยตัวอย่าง 3.2.3 จะได้ว่า

$$\sin(2n+1)\alpha = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n+1-1}\alpha\sin\alpha-\binom{2n+1}{3}\cos^{2n+1-3}\alpha\sin^3\alpha+\binom{2n+1}{5}\cos^{2n+1-5}\alpha\sin^5\alpha+...$$

$$= \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\alpha\sin\alpha-\binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\alpha\sin^3\alpha+\binom{2n+1}{5}\cos^{2n-4}\alpha\sin^5\alpha+...$$

$$= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\cos^{2n-2j}\alpha\sin^{2j+1}\alpha$$

$$= \sin^{2n+1}\alpha\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\cos^{2n-2j}\alpha\sin^{-2n+2j}\alpha$$

$$= \sin^{2n+1}\alpha\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\cos^{2n-2j}\alpha\sin^{-2n+2j}\alpha\frac{\sin^{2n-2j}\alpha}{\sin^{2n-2j}\alpha}$$

$$= \sin^{2n+1}\alpha\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\frac{\cos^{2n-2j}\alpha}{\sin^{2n-2j}\alpha}\sin^{-2n+2j+2n-2j}\alpha$$

$$= \sin^{2n+1}\alpha\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\cot^{2n-2j}\alpha \qquad ....(1)$$

ถ้า $\sin\alpha \neq 0$ เราแทน $\alpha = \frac{k\pi}{2n+1}$ ใน (1) ซึ่งแต่ละ α ทำให้ $\sin(2n+1)\alpha = 0$ เราจะได้ว่า x_k เป็นรากของสมการ

$$\binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+1}{5}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1} = 0$$

จากความสัมพันธ์ของรากและสัมประสิทธิ์ของพหุนาม (Vieta' s Relations) (ดูนิยามในภาคผนวก 20) จะได้ผลบวกของรากของสมการเป็นดังนี้

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-3)!3!}\cdot\frac{(2n+1-1)!1!}{(2n+1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-2)!3!}$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{3!} = \frac{2n(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

เพราะฉะนั้น $\cot^2\frac{\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \cot^2\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ #

4.3.5 ตัวอย่าง : การพิสูจน์เอกลักษณ์ $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt[3]{7}\right)}$

บทพิสูจน์ : เราพิจารณารากที่ 7 ของ 1 จาก $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + \ldots + x + 1)$

$$= (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)\ldots(x-\varepsilon^{n-1})$$

และถ้า $x - 1 \neq 0$ แล้ว $x^6 + x^5 + \ldots + x + 1 = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)\ldots(x-\varepsilon^{n-1})$ ทำให้ได้ว่าจำนวนเชิงซ้อน $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6$ โดยที่ $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ เป็นรากของสมการ

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

(1) เราจะแสดงว่า ถ้า $x \neq 0$ เป็นรากของ $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ แล้ว $x + \frac{1}{x}$ เป็นรากของสมการ $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$

บทพิสูจน์ : $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$$= x^3\left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= x^3\left[\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right]$$

$$
\begin{aligned}
x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\
&= x^3\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1-3x-\frac{3}{x}-2\right] \\
&= x^3\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right] \\
&= x^3\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right]
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $x \neq 0$ ดังนั้น

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1 = 0$$

ซึ่งแสดงว่า $x+\frac{1}{x}$ เป็นรากของสมการ $y^3+y^2-2y-1 = 0$

(2) เราจะแสดงว่า $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$ และ $2\cos\frac{6\pi}{7}$ เป็นรากทั้งสามของสมการ

$y^3+y^2-2y-1 = 0$

บทพิสูจน์ : เพราะว่า ε , ε^2 และ ε^3 เป็นรากของ $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$

ดังนั้น (โดยข้อ (1)) $\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}$ และ $\varepsilon^3+\frac{1}{\varepsilon^3}$ เป็นรากของ $y^3+y^2-2y-1 = 0$

ให้ $z = \cos\theta+i\sin\theta \neq 0$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta} \\
&= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta+i\sin^2\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \bar{z}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $z+\frac{1}{z} = z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2\cos\theta$

เราจึงได้ว่า $\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$, $\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2} = 2\cos\frac{4\pi}{7}$ และ $\varepsilon^3+\frac{1}{\varepsilon^3} = 2\cos\frac{6\pi}{7}$

เป็นรากของ $y^3+y^2-2y-1 = 0$

(3) ให้ $y_1 = \varepsilon+\frac{1}{\varepsilon} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$, $y_2 = \varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2} = 2\cos\frac{4\pi}{7}$ และ

$y_3 = \varepsilon^3+\frac{1}{\varepsilon^3} = 2\cos\frac{6\pi}{7}$

แล้วเราต้องการหาค่าของ $\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2}+\sqrt[3]{y_3} = \sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{6\pi}{7}}$

ให้ $\sqrt[3]{y_1}$, $\sqrt[3]{y_2}$ และ $\sqrt[3]{y_3}$ เป็นรากของสมการ $z^3 - Az^2 + Bz - C = 0$ โดยที่ A , B เป็นค่าคงตัวแล้วความสัมพันธ์ของรากและสัมประสิทธิ์ เราจะได้ความสัมพันธ์

$$\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3} = A \qquad ....(1)$$

$$\sqrt[3]{y_1}\sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_2}\sqrt[3]{y_3} + \sqrt[3]{y_3}\sqrt[3]{y_1} = B \qquad ....(2)$$

$$\sqrt[3]{y_1 y_2 y_3} = C \qquad ....(3)$$

และเราต้องการหาค่า A

จาก y_1 , y_2 , y_3 เป็นรากของสมการ $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ เราจะได้ความสัมพันธ์ของราก และสัมประสิทธิ์ ต่อไปนี้

$$y_1 + y_2 + y_3 = -1 \qquad ....(4)$$

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = -2 \qquad ....(5)$$

$$y_1 y_2 y_3 = 1 \qquad ....(6)$$

จากสมการ (6) เราจะได้ $C = \sqrt[3]{y_1 y_2 y_3} = 1$ ....(7)

จากเอกลักษณ์ $(m+p+q)^3 = m^3 + p^3 + q^3 + 3(m+p+q)(mp+pq+qm) - 3mpq$ และสมการ (1) - (7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A^3 &= \left(\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}\right)^3 \\
&= y_1 + y_2 + y_3 + 3\left(\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}\right)\left(\sqrt[3]{y_1 y_2} + \sqrt[3]{y_2 y_3} + \sqrt[3]{y_3 y_1}\right) - 3\sqrt[3]{y_1 y_2 y_3} \\
&= -1 + 3AB - 3(1) = 3AB - 4
\end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
B^3 &= \left(\sqrt[3]{y_1}\sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_2}\sqrt[3]{y_3} + \sqrt[3]{y_3}\sqrt[3]{y_1}\right)^3 \\
&= y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 + 3\left(\sqrt[3]{y_1 y_2} + \sqrt[3]{y_2 y_3} + \sqrt[3]{y_3 y_1}\right) \\
&\qquad \left(\sqrt[3]{y_1 y_2^2 y_3} + \sqrt[3]{y_1 y_2 y_3^2} + \sqrt[3]{y_1^2 y_2 y_3}\right) - 3\sqrt[3]{y_1^2 y_2^2 y_3^2} \\
&= -2 + 3BA - 3(1) = 3BA - 5 \qquad ....(8)
\end{aligned}$$

และให้ $w = AB$ แล้ว

$$w^3 = A^3B^3 = (3AB-4)(3AB-5) = (3w-4)(3w-5) = 9w^2-27w+20$$

แต่เพราะว่า

$$(w-3)^3 = w^3-9w^2+27w-27 = 9w^2-27w+20-9w^2+27w-27 = -7$$

ดังนั้น $w-3 = \sqrt[3]{-7} = -\sqrt[3]{7}$ ทำให้ได้ $w = 3-\sqrt[3]{7}$

และ $A^3 = 3w-4 = 3\left(3-\sqrt[3]{7}\right)-4 = 5-3\sqrt[3]{7}$ เพราะฉะนั้น $A = \sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}}$

จะได้ว่า $\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2}+\sqrt[3]{y_3} = \sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{A^3} = A$

(4) $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{2\cos\frac{6\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2}+\sqrt[3]{y_2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5-3\sqrt[3]{7}\right)}$$

ซึ่งเป็นอันจบการพิสูจน์ #

บรรณานุกรม

[1] ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ *พีชคณิต* พิมพ์ที่ บริษัทด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด 2547.

[2] E.J. Barbeau, *Problem Books in Mathematics : Polynomials*, Springer – Varlag, New York 1989.

[3] M. Evans, K. Lipson, D. Wallace and S. Avery, *Essential : Advanced General Mathematics*, Cambridge University Press, 1999.

[4] J. Herman, R. Kucere and J. Simsa, *Equations and Inequalities: Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory*, Canadian Mathematical Society, Springer – Verlay, New York, 2000.

[5] JV. Deshpande , *complex Analysis* , Mc Graw – Hill book Co. , 1986.

[6] Peter henlici , *Applied and computational complex Analysis : Volume I powersiries – integration – conformal mapping – location of zeroes* , Wiley and sons , Inc , 1974.

ภาคผนวก

1. **บทนิยาม** : กำหนด R เป็นเซตซึ่ง $R \neq \varnothing$ + และ · แทนการดำเนินการทวิภาคที่นิยามบน R โดยจะเรียก 2 การดำเนินการทวิภาคนี้ว่า “การบวก” และ “การคูณ” ตามลำดับ

โครงสร้าง (R, + , ·) เป็น **วง** (ring) ก็ต่อเมื่อ

1. โครงสร้าง (R , +) เป็นกลุ่มอาบีเลียน (abelian group)
2. การคูณ · สอดคล้องสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) นั่นคือ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

และ 3. การคูณ · สอดคล้องสมบัติการกระจายเหนือการบวก + (distributive law) นั่นคือ $(b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ หรือ $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

2. **บทนิยาม** : กำหนด (R , + , ·) เป็นวง จะกล่าวว่า

1. R เป็นวงสลับที่ (commutative ring) ก็ต่อเมื่อ $ab = ba$ สำหรับทุกสมาชิก a, b ใน R
2. R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ (ring with identity) ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกใน R ซึ่งเขียนแทนด้วย 1 ที่ทำให้ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ เมื่อ a เป็นสมาชิกใด ๆ ใน R

3. **บทนิยาม** : ฟังก์ชันหรือการส่ง (function on mapping) จากเซต S ไปยังเซต T คือความสัมพันธ์ของ S และ T โดยที่แต่ละสมาชิกของ S มีความสัมพันธ์กับสมาชิกของ T ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

เรียก S ว่า**โดเมน**(domain)ของฟังก์ชัน ในขณะที่เรียก T ว่า **โคโดเมน**(codomain) หรือ **พิสัย** (range)ของฟังก์ชัน

นิยมใช้อักษรกรีกแทนฟังก์ชัน เช่น α , β , γ , ... เป็นต้น

ถ้า α เป็นฟังก์ชันจาก S ไปยัง T จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\alpha : S \rightarrow T$ หรือ $S \xrightarrow{\alpha} T$

ถ้า x เป็นสมาชิกใน S แล้ว $\alpha(x)$ จะแทนสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้นใน T ซึ่งเรียก $\alpha(x)$ ว่าอิมเมจของ x ภายใต้ α และเรียก x ว่า อิมเมจผกผันของ y ภายใต้ α

4. **บทนิยาม** : ให้ S และ T เป็นเซต ถ้า $\alpha : S \rightarrow T$ และ $\alpha(s) = T$ เราเรียก α ว่า**ฟังก์ชันทั่วถึง** (onto function) หรืออีกนัยหนึ่งว่า α เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ถ้าแต่ละ $y \in T$ จะมี $x \in S$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ $\alpha(x) = y$

5. **บทนิยาม** : ให้ S และ T เป็นเซต เราเรียก ฟังก์ชัน $\alpha : S \rightarrow T$ ว่า**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (one – one function) ถ้าทุก ๆ สมาชิกที่ต่างกันใน S มีอิมเมจภายใต้ α ที่ต่างกันใน T

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า $\alpha : S \to T$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ถ้า $x_1 \neq x_2 \to \alpha(x_1) \neq \alpha(x_2)$ หรือ $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \to x_1 = x_2$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in S$

6. **ขั้นตอนการหารของจำนวนเต็ม** (Division Algorithm of Intergers) :

ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a = bq + r$ โดยที่ $0 \leq r < b$

7. **บทนิยาม** : ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม และมีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $a = bc$ เรากล่าวว่า " b หาร a ลงตัว " หรือ " b เป็นตัวหารของ a " หรือ " a เป็นพหุคูณของ b "

8. **ทฤษฎีบท** : ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งไม่เป็นพหุคูณของ 2 หรือ 3 แล้วจะมี $k \in \mathbf{N}$ ทำให้ $n = 6k + 1$

บทพิสูจน์ : ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก เนื่องจาก n ไม่เป็นพหุคูณของ 2 หรือ 3 นั่นคือ 2 หาร n ไม่ลงตัว และ 3 หาร n ไม่ลงตัว โดยขั้นตอนการหารจะมีจำนวนเต็มบวก t ซึ่ง $n = 2t + 1$ จะมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $n = 3k + 1$ หรือ $n = 3k + 2 = 3k + 3 - 1 = 3(k + 1) - 1$ เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก q ซึ่ง $n = 3q + 1$ หรือ $n = 3q - 1$

กรณีที่ 1 : ถ้า $n = 2t + 1 = 3k + 1$ แล้ว $2t = 3k$ จะได้ว่า $2 \mid k$ และ $3 \mid t$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก s และ r ซึ่งทำให้ $k = 2s$ และ $t = 3r$ เพราะฉะนั้น $n = 2t + 1 = 2(3r) + 1 = 6r + 1$ หรือ $n = 3k + 1 = 3(2s) + 1 = 6s + 1$

กรณีที่ 2 : ถ้า $n = 2t + 1 = 3q - 1$ แล้ว $2t + 1 + 2 = 3q - 1 + 2$ และทำให้ได้ $2(t + 1) + 1 = 3q + 1$ เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก $p = t + 1$ ซึ่งทำให้ $2p + 1 = 3q + 1$ แล้วโดยกรณีที่ 1 จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก x และ y ซึ่งทำให้ $q = 2x$ และ $p = 3y$ เพราะฉะนั้น $n = 2t + 1 = 2(p - 1) + 1 = 2p - 1 = 2(3y) - 1 = 6y - 1$ หรือ $n = 3q + 1 = 3(2x) + 1 = 6x + 1$

จากกรณีที่ 1 และ 2 ทำให้ได้ว่าถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งไม่เป็นพหุคูณของ 2 หรือ 3 แล้วจะมี $k \in \mathbf{N}$ ซึ่งทำให้ $n = 6k + 1$ หรือ $6k - 1$ ❑

9. **บทนิยาม** : เราเรียกฟังก์ชันในตัวแปร x เพียงตัวเดียวว่า **พหุนามเหนือฟิลด์** F (polynomial over field F) บนโดเมน F ของฟังก์ชัน ถ้าเราสามารถเขียนฟังก์ชันได้ในรูปแบบที่แน่นอนดังนี้

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นสมาชิกของ F และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

เราเรียก $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ของพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ว่า **สัมประสิทธิ์(coefficient)** ของพหุนาม ส่วน a_n เราเรียกว่า**สัมประสิทธิ์นำ(leading coefficient)** และถ้าสัมประสิทธิ์นำ $a_n \neq 0$ เราจะเรียก n ว่า**กำลัง(degree)** ของพหุนามและเขียนแทนด้วย deg P(x)

เราเรียกพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นศูนย์ว่า**พหุนามศูนย์** (zero polynomial) และเราไม่นิยามกำลังของพหุนามศูนย์ ส่วนพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์นำ $a_n = 1$ เราเรียกว่า**พหุนามโมนิก** (monic polynomial)

P(x) เป็นพหุนามกำลัง 0 ก็ต่อเมื่อ P(x) คือสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน P และเราจะเรียกว่า**พหุนามคงตัว**(constant polynomial)

เราเรียกพหุนามกำลังหนึ่งซึ่งอยู่ในรูป $ax + b$ ว่า**พหุนามเชิงเส้น**(linear polynomial) และเรียกพหุนามกำลังสองซึ่งอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ ว่า**พหุนามกำลังสอง** (quadratic polynomial)

เรากล่าวว่าพหุนาม P(x) และพหุนาม Q(x) เป็นพหุนามเดียวกัน นั่นคือ P(x) = Q(x) ก็ต่อเมื่อพหุนามทั้งสองเป็นพหุนามที่มีกำลังเท่ากันและสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังเท่ากันของพหุนามทั้งสองมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

ถ้า $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ และ $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$ เป็นพหุนามเหนือ F แล้ว P(x) = Q(x) ก็ต่อเมื่อ $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, . . . , $a_n = b_n$

10. บทนิยาม : ถ้า $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ เป็นพหุนามกำลัง n (นั่นคือ $a_n \neq 0$) ในตัวแปร x เพียงตัวเดียวเหนือ F เราจะเรียกสมการ "P(x) = 0" ว่า **สมการพหุนามกำลัง n** เหนือ F และเรียก สมการพหุนามกำลัง n ที่มีสัมประสิทธิ์ของ x^n เป็น 1 (นั่นคือ $a_n = 1$) ว่า **สมการพหุนามโมนิก**(monic polynomial equation)

11. บทนิยาม : เราเรียกพหุนาม $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ ที่มีสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม ว่า **พหุนามปฐมฐาน** (primitive polynomial) ถ้าตัวหารร่วมมากของ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ คือ 1

ตัวอย่างเช่น $3x^2 + 9x + 7$ เป็นพหุนามปฐมฐาน แต่ $10x^2 - 5x + 15$ ไม่ใช่พหุนามปฐมฐาน เป็นต้น

12. บทนิยาม : ให้ c เป็นสมาชิกของฟิลด์ F สำหรับการแทนค่า x ด้วย c ในพหุนาม P(x) เหนือ F จะได้สมาชิกในพิสัย(range)ซึ่งเราเรียกว่า **ค่าของพหุนาม** P(x) ที่ c และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(c) ดังนั้น

$$P(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1c + a_0$$

13. บทนิยาม : ถ้า P(c) = 0 จะเรียก c ว่า**ราก**(root) หรือ **คำตอบ**(solution) ของพหุนาม P(x) และ-ของสมการพหุนาม P(x) = 0

14. บทนิยาม : เราใช้สัญลักษณ์ $F[x]$ แทนเซตของพหุนามเหนือเซต F ทั้งหมด

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และให้

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ และ $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ ต่างเป็นพหุนามใน $F[x]$ และ c เป็นสมาชิกคงตัวของ F เราจะนิยามการดำเนินการต่อไปนี้บน $F[x]$

การบวกระหว่างพหุนาม : $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^t$

โดยที่ $c_i = a_i + b_i$ สำหรับ $0 \leq i \leq t$ และ t เป็นตัวมากสุดของ m และ n (นั่นคือผลบวกของพหุนามคือพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นผลบวกของสัมประสิทธิ์ที่สมนัยกันของพหุนามทั้งสอง)

การคูณระหว่างค่าคงตัวกับพหุนาม : $(cP)(x) = c\,P(x) = ca_0 + ca_1 x + \ldots + ca_n x^n$

การคูณระหว่างพหุนาม : $(PQ)(x) = P(x)Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^t$

โดยที่ $c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \ldots + a_0 b_i$ สำหรับ $0 \leq i \leq t$ และ $t = m + n$

[นั่นคือสัมประสิทธิ์ของพหุนามผลคูณได้จากการกระจายการคูณของสัญลักษณ์เช่นเดียวกับการคูณของระบบจำนวนและใช้ความสัมพันธ์ $x^a x^b = x^{a+b}$]

15. ขั้นตอนการหารของพหุนาม (Division Algorithm of Polynomials) :

ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ ต่างเป็นพหุนามเหนือฟิลด์ F โดยที่ $g(x)$ ไม่ใช่พหุนามศูนย์แล้วจะมีพหุนาม $g(x)$ และ $r(x)$ เหนือ F เพียงคู่เดียวที่ทำให้ $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ เป็นเอกลักษณ์เหนือ F โดยที่กำลังของ $r(x)$ น้อยกว่ากำลังของ $g(x)$ หรือ $r(x)$ เป็นพหุนามศูนย์

บทพิสูจน์ : เราจะพิสูจน์ว่ามีพหุนาม $q(x)$ และ $r(x)$ เหนือ F ดังกล่าวเสียก่อน สำหรับกรณี $f(x) = 0$ หรือ $\deg f(x) < \deg g(x)$ เราจะให้ $q(x) = 0$ และ $r(x) = f(x)$ แล้วเห็นได้ชัดว่าทฤษฎีบทเป็นจริง เราจึงพิจารณากรณีซึ่ง $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ และ $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ โดยที่ $a_m \neq 0$, $b \neq 0$ และ $m \geq n$ แล้วจะพิสูจน์ว่ามีพหุนาม $q(x)$ และ $r(x)$ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

ขั้นฐาน : ถ้า $m = 0 \geq n$ แล้ว $n = 0$ ทำให้ทฤษฎีบทเป็นจริงโดยใช้ขั้นตอนการหารใน F

ขั้นอุปนัย : ต่อไปเราสมมติให้ทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับทุกพหุนามที่ที่มีกำลังน้อยกว่า m และให้

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} g(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

แล้ว $f_1(x)$ เป็นพหุนามใน $F[x]$ ที่มีสัมประสิทธิ์ของ x^m คือ $a_m - \left(\frac{a_m}{b_n}\right) b_n = 0$ ดังนั้น $\deg f_1(x) \leq m - 1$ ซึ่งโดยสมมติฐานของขั้นอุปนัย เราจะมีพหุนาม $q_1(x)$ และ $r(x)$ ใน $F[x]$ ซึ่ง

$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r(x)$ โดยที่ $r(x) = 0$ หรือ $\deg r(x) < \deg g(x)$

และเมื่อแทนค่า $f_1(x)$ ลงใน (1) เราจะได้

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} g(x) = q_1(x)g(x) + r(x)$$

หรือ $$f_1(x) = [\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} + q_1(x)]\, g(x) + r(x)$$

ดังนั้น $g(x) = \frac{a_m}{b_n}x^{m-n} + q_1(x)$ เราก็จะได้

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ โดยที่ $r(x) = 0$ หรือ $\deg r(x) < \deg g(x)$

ตามต้องการ

ต่อไปเราจะแสดงว่า $q(x)$ และ $r(x)$ ดังกล่าวมีเพียงชุดเดียว โดยสมมติว่ามีพหุนาม $q_1(x)$ และ $r_1(x)$ อีกชุดหนึ่งใน $F[x]$ ซึ่ง $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$ โดยที่ $r_1(x) = 0$ หรือ $\deg r_1(x) < \deg g(x)$ ดังนั้น

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

ทำให้ได้ $r(x) - r_1(x) = [\, q_1x) - q(x)\,]\, g(x)$ และถ้า $q(x) - q_1(x) \neq 0$ แล้ว

$$\deg [\, q_1(x) - q(x)\,] = \deg [\, q_1(x) - q(x)\,] + \deg g(x) \geq \deg g(x) > \deg [\, r(x) - r_1(x)\,]$$

ซึ่งขัดแย้งกับ $\deg [\, q_1(x) - q(x)\,]\, g(x) = \deg [\, r(x) - r_1(x)\,]$ พราะฉะนั้น $q_1(x) = q(x)$ และทำให้ได้ $r_1(x) = r(x)$ จึงเป็นอันจบการพิสูจน์ ❑

16. ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem) :

ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามใน $F[x]$ โดยที่ $P(x)$ ไม่ใช่พหุนามคงตัว และ $c \in F$ แล้ว $P(c) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

บทพิสูจน์ : ให้ $P(c) = 0$ และโดยขั้นตอนการหารของพหุนาม เมื่อ $x - c \neq 0$ เราจะมี $q(x) \in F[x]$ ซึ่ง

$$P(x) = (\, x - c\,)q(x) + r(x) \text{ โดยที่ } r(x) = 0 \text{ หรือ } \deg r(x) < \deg (\, x - c\,) = 1$$

จาก $\deg r(x) < 1$ ทำให้ได้ว่า $r(x)$ เป็นพหุนามคงตัว ดังนั้น $r(x) = R \in F$ ทำให้ได้ว่า

$$P(x) = (\, x - c\,)q(x) + R \quad \text{แต่} \quad 0 = P(c) = (\, c - c\,)q(c) + R = 0 + R = R$$

ดังนั้น $P(x) = (\, x - c\,)q(x) + 0 = (\, x - c\,)q(x)$ ซึ่งแสดงว่า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ในการพิสูจน์บทกลับ เราให้ $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ นั่นคือมี $q(x) \in F[x]$ ซึ่ง $P(x) = (\, x - c\,)q(x)$ ดังนั้น $P(c) = (\, c - c\,)q(c) = 0$ ❑

17. ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต (Fundamental Theorem of Algebra) :

ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามใน $\mathbf{C}[x]$ ที่มีกำลังมากกว่าศูนย์แล้ว $P(x)$ จะมีรากใน $\mathbf{C}$

18. ผลพลอยได้ของทฤษฎีบทหลักมูล :

ทุกพหุนามกำลัง n จะมีรากเชิงซ้อนเท่ากับ n ราก (นับรากที่ซ้ำกันด้วย)

บทพิสูจน์ : ให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามกำลัง $n \geq 1$ เหนือ $\mathbf{C}$ และโดยทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต เราจะได้ว่า $P(x)$ มีรากอย่างน้อย 1 รากใน $\mathbf{C}$ และถ้าเราให้ $c_1 \in \mathbf{C}$ เป็นรากของ $P(x)$ แล้ว $x - c_1$ จะเป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$P(x) \;=\; (x - c_1)q_1(x)$$

โดยที่ $q_1(x)$ เป็นพหุนามกำลัง $n - 1$ และถ้า $n - 1 \geq 1$ พหุนาม $q_1(x)$ ก็จะมีรากอย่างน้อย 1 รากเช่นกัน จึงสมมติให้ชื่อว่า c_2 แล้ว $x - c_2$ ก็จะเป็นตัวประกอบของ $q_1(x)$ ซึ่งทำให้เราได้

$$P(x) \;=\; (x - c_1)(x - c_2)q_2(x)$$

โดยที่ $q_2(x)$ เป็นพหุนามกำลัง $n - 2$

เมื่อดำเนินการเช่นนี้ไป n ครั้ง (หรือใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์) เราจะได้

$$P(x) \;=\; (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ldots(x - c_n)\, r(x)$$

แต่ $(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ldots(x - c_n)$ เป็นพหุนามกำลัง n ซึ่งเท่ากับกำลังของพหุนาม $P(x)$ เราจึงได้ว่า กำลังของ $r(x)$ ต้องเป็นศูนย์ นั่นคือ $r(x) = d \in \mathbf{C}$ เพราะฉะนั้น

$$P(x) \;=\; d\,(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ldots(x - c_n)$$

ซึ่งแสดงว่าพหุนาม $P(x)$ มีรากเท่ากับ n รากใน $\mathbf{C}$ ❑

19. **ทฤษฎีบท** : ทุกพหุนามกำลังสามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จะมีรากจริงอย่างน้อยรากหนึ่ง

บทพิสูจน์ : เราสามารถแปลงพหุนามกำลังสามทุกพหุนาม ให้อยู่ในรูปแบบ $a(t^3 + pt + q)$ ได้เสมอ จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทเฉพาะกรณีของพหุนามในรูปแบบ $a(t^3 + pt + q)$

ให้ $P(t) = t^3 + pt + q$ โดยที่ p และ q เป็นจำนวนจริง แล้วจะแสดงว่ามีจำนวนจริง α ที่ทำให้

$$t^3 + pt + q = (t - \alpha)(t^2 + \beta t + \gamma)$$

ให้ $t = u + v$ เป็นรากของพหุนาม $t^3 + pt + q$ นั่นคือสมมติว่ารากอยู่ในรูปแบบ $u + v$ แล้วจะหา u และ v ซึ่งจะได้ $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$

แต่การสมมติรากดังข้างต้น เราต้องการให้ได้สมการที่ไม่มีพจน์กำลังหนึ่งและกำลังสอง จึงให้ $3uv + p = 0$ และได้

$u^3 + v^3 = -q$ ทำให้ได้ระบบสมการ $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$ ซึ่งแสดงว่า u^3 และ v^3 เป็นรากของสมการ

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} \;=\; 0 \quad \text{นั่นคือ} \quad \{u^3, v^3\} \;=\; \left\{ \frac{-3\sqrt{3q} \pm \sqrt{27q^2 + 4p^3}}{6\sqrt{3}} \right\}$$

ให้ $D = 27q^2 + 4p^3$ แล้วพิจารณากรณีต่อไปนี้

กรณี 1 : ถ้า $D > 0$ แล้วพหุนาม $y^2 + qy - \dfrac{p^3}{27}$ มีรากทั้งสองเป็นจำนวนจริง เพราะว่าดิสคริมิแนนท์ของ $y^2 + qy - \dfrac{p^3}{27}$ คือ $\dfrac{27q^2 + 4p}{27}$ ดังนั้นถ้า $D > 0$ แล้ว $\dfrac{27q^2 + 4p}{27} > 0$ ด้วย

ให้ u_0^3 แล้ว v_0^3 เป็นรากจริงทั้งสองของ $y^2 + qy - \frac{p^3}{27}$ ดังนั้น u_0 และ v_0 เป็นจำนวนจริงซึ่งแสดงว่าพหุนาม $t^3 + pt + q$ มีรากจริงรากหนึ่งคือ $u_0 + v_0$

[**หมายเหตุ** : นอกจากนั้นรากที่ไม่ใช่จำนวนจริงของ P(t) อีก 2 รากก็คือ $u_0\omega + v_0\omega^2$ และ $u_0\omega^2 + v_0\omega$ เมื่อ ω คือรากปฐมฐาน $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ซึ่งเป็นรากที่ 3 ของ 1]

กรณี 2 : ถ้า $D = 0$ แสดงว่าพหุนาม $y^2 + qy - \frac{p^3}{27}$ มีรากทั้งสองเป็นจำนวนจริงซ้ำกัน

ให้ u_0^3 เป็นรากซ้ำของ $y^2 + qy - \frac{p^3}{27}$ แล้ว $q = -2u_0^3$ และ $-\frac{p^3}{27} = (u_0^3)^2$ หรือ $p = -3u_0^2$ โดยที่ u_0^3 เป็นจำนวนจริงซึ่งจะได้ว่า u_0 เป็นจำนวนจริงด้วย และยิ่งไปกว่านั้น

$$t^3 + pt + q = t^3 - 3u_0^2 t - 2u_0^3 = (t + u_0)^2(t - 2u_0)$$

ทำให้ได้ว่าในกรณีนี้รากทั้งหมดของ $t^3 + pt + q$ คือ $-u_0$ หรือ $2u_0$ ซึ่งเป็นรากจริงทั้งสิ้น

กรณี 3 : ถ้า $D < 0$ แสดงว่าพหุนาม $y^2 + qy - \frac{p^3}{27}$ มีรากทั้งสองคือ u^3 และ v^3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นสังยุคของกันและกัน ทำให้เราสามารถเลือก u และ v ซึ่งเป็นคู่สังยุคของกันและกันแลสอดคล้อง

กับระบบสมการ $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$

ให้ $u = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ $v = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ เป็นรูปโพล่าร์ของ u และ v แล้วจะได้

$$u^3 + v^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 + r^3(\cos\theta - i\sin\theta)^3 = 2r^3(\cos 3\theta) = -q$$

และ $$uv = r^2(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 = -\frac{p}{3}$$

หรือ $p = -3r^2$ นอกจากนี้ $u + v = 2r\cos\theta$ เราจึงได้

$$\begin{aligned} P(2r\cos\theta) &= (2r\cos\theta)^3 + (-3r^2)(2r\cos\theta) - 2r^3(\cos 3\theta) \\ &= 8r^3\cos^3\theta - 6r^3\cos\theta - 2r^3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 0 \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า $2r\cos\theta$ เป็นรากของพหุนาม $P(t) = t^3 + pt + q$ และ $2r\cos\theta$ เป็นจำนวนจริง

[**หมายเหตุ** : นอกจากนี้

$$P(2r\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})) \;=\; P(2r(-\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2})) \;=\; P(-r(\cos\theta + \sqrt{3}\ \sin\theta))$$

$$= (-r)^3(\cos\theta + \sqrt{3}\ \sin\theta)^3 + (-3r^2)(-r)(\cos\theta + \sqrt{3}\ \sin\theta) - 2r^3(\cos 3\theta)$$

$$= -r^3(\cos^3\theta + 3\sqrt{3}\ \cos^2\theta\sin\theta) + 9\cos\theta\sin^2 1\theta + 3\sqrt{3}\ \sin^3\theta\sin\theta)$$

$$+3r^3\cos\theta + 3\sqrt{3}\ r^3\sin\theta - 2r^3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$= -r^3\cos^3\theta - 3\sqrt{3}\ r^3\sin\theta - 9r^3\cos\theta + 9r^3\cos\theta + 3r^3\cos\theta$$

$$+3\sqrt{3}\ r^3\sin\theta\ 8r^3 - 8r^3\cos^3\theta + 6r^3\cos\theta$$

$$= 0$$

และในทำนองเดียวกัน $P(2r\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})) = 0$ ซึ่งแสดงว่ารากทั้งสามของ $t^3 + pt + q$ คือ $2r\cos\theta$, $2r\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})$ หรือ $2r\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงทั้งหมด]

ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด $t^3 + pt + q$ จะมีรากจริงอย่างน้อยหนึ่งราก ❑

20. **ความสัมพันธ์ของรากและสัมประสิทธิ์ของพหุนาม** (Vieta' s Relations) : ถ้า $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นราก n รากของสมการพหุนามโมนิกกำลัง $n \geq 1$ แล้ว

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ldots(x - c_n)$$

เมื่อกระจายผลคูณทางขวามือของสมการโดยใช้ทฤษฎีบททวินามและโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของพหุนามเดียวกัน เราจะได้ความสัมพันธ์ของรากและสัมประสิทธิ์ของพหุนาม เป็นดังนี้

P_1 = - (ผลบวกของราก) = $-\sum c$

P_2 = + (ผลบวกของผลคูณทีละ 2 ราก) = $\sum ab$

P_3 = - (ผลบวกของผลคูณทีละ 3 ราก) = $-\sum abc$

.

.

.

P_k = $(-1)^k$ (ผลบวกของผลคูณทีละ $n-k$ ราก) เมื่อ $1 \leq k \leq n$

P_n = $(-1)^n$ (ผลคูณ n ราก)

บัญชีสัญลักษณ์

R	: เซตของจำนวนจริงทั้งหมด
N	: เซตของจำนวนนับทั้งหมด
Z	: เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด
Q	: เซตของจำนวนตรรกยะ
C	: เซตของจำนวนเชิงซ้อน
ω	: รากปฐมฐานของ 1
Re(z)	: ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน z
Im(z)	: ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน z
$\bar{z}$	: สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z
$\|z\|$	: ค่าสัมบูรณ์หรือโมดูลัสของจำนวนเชิงซ้อน z
$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ หรือ $r\text{cis}\theta$	: รูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน z
arg(z)	: อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z
p(x)	: พหุนาม p(x)

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นางสาวรังสิมา ถิรจันทรา
ที่อยู่	16 หมู่ 4 ตำบลวังมะนาว อำเภอปากท่อ จังหวัดราชบุรี 70140
ที่ทำงาน	โรงเรียนราชโบริกานุเคราะห์ ตำบลหน้าเมือง อำเภอเมือง จังหวัดราชบุรี 70000
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2542	สำเร็จการศึกษาครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากสถาบันราชภัฏเพชรบุรี อำเภอเมือง จังหวัดเพชรบุรี
พ.ศ. 2546	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
ประวัติการทำงาน	
พ.ศ. 2542 – 2546	อาจารย์ 1 ระดับ 3 สอนวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนบรมราชินีนาถราชวิทยาลัย อำเภอปากท่อ จังหวัดราชบุรี
พ.ศ. 2547 – ปัจจุบัน	ครู อันดับ คศ.1 สอนวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนราชโบริกานุเคราะห์ อำเภอเมือง จังหวัดราชบุรี