อนุกรมของจำนวนจริง

โดย
นางสาวอังคณา ศรีเตชานุพงศ์

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2551

อนุกรมของจำนวนจริง

โดย

นางสาวอังคณา ศรีเตชานุพงศ์

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

SERIES OF REAL NUMBERS

By

Angkana Sritachanupong

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2008

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง " อนุกรมของจำนวนจริง " เสนอโดย นางสาวอังคณา ศรีเตชานุพงศ์ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

……...

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่.........เดือน................... พ.ศ..........

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. จิตติ รักบุตร)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

............/......................../..............

48308308 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : ลำดับ / ลำดับลู่เข้า / การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม

อังคณา ศรีเตชานุพงศ์ : อนุกรมของจำนวนจริง. อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต. 90 หน้า.

อนุกรมของจำนวนจริง คือลำดับของจำนวนจริงซึ่งสร้างจากลำดับของจำนวนจริงหนึ่งที่กำหนดให้ ในการค้นคว้าอิสระฉบับนี้เราเริ่มต้นศึกษาลำดับของจำนวนจริงและสมบัติต่าง ๆ อย่างละเอียด โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เราศึกษาทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ ซึ่งใช้ในการพิสูจน์สมบัติที่สำคัญบางประการของลำดับ

ในการศึกษาอนุกรมของจำนวนจริง เราจะศึกษาการลู่เข้าของอนุกรมของจำนวนจริงและการทดสอบการลู่เข้า นอกจากนี้เราศึกษาการลู่เข้าแบบต่าง ๆ ของอนุกรม คือการลู่เข้าสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข สุดท้ายเราศึกษาผลคูณของอนุกรม และจากการศึกษาแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของการลู่เข้าสัมบูรณ์ของอนุกรม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2551
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ...

48308308 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY
KEY WORDS : SEQUENCES / CONVERGENT SEQUENCE / TESTS FOR CONVERGENCE OF SERIES

ANGKANA SRITACHANUPONG : SERIES OF REAL NUMBERS. AN INDEPENDENT STUDY ADVISOR : ASSOC. PROF. WAREE KAROT. 90 pp.

A series of real numbers is a sequence of real numbers defined from a given sequence of real numbers. In this an independent study we first study sequences of real numbers and their properties, especially we study Bolzano-Weierstrass theorem which we apply to prove an important property of sequences.

For the study of series of real numbers we present all tests of convergence. Morever we study absolute convergence and conditional convergence of series. Finally we study products of series and the study shows the importance of absolute convergence of series.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Ycar 2008
Student's signature..
An Independent Study Advisor's signature..

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มและแก้ไขในส่วนที่บกพร่อง จนทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติและภาควิชาคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ความรู้ จนทำให้ศิษย์คนนี้ประสบความสำเร็จในด้านการศึกษา และสามารถนำสิ่งที่เรียนรู้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ได้อย่างถูกต้อง

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ และรุ่นพี่ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ ทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือและเป็นมิตรที่ดีในระหว่างการศึกษา

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดาและครอบครัวของข้าพเจ้าที่ได้ให้กำลังใจ มอบความรัก ความดูแลและให้การสนับสนุนการศึกษา จนทำให้ข้าพเจ้าประสบผลสำเร็จ

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ
(INTRODUCTION)

อนุกรมของจำนวนจริงเป็นพื้นฐานที่สำคัญในคณิตศาสตร์ ซึ่งมีการประยุกต์อย่างกว้างขวางในสาขาวิชาต่างๆ การศึกษาอนุกรมของจำนวนจริงต้องอาศัยแนวคิดของลำดับ ซึ่งเราจะศึกษาอย่างละเอียด เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจและมีความลึกซึ้งในการศึกษาอนุกรมได้ดียิ่งขึ้น

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราจะนำเสนอการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมชนิดต่างๆ รวมทั้งศึกษาการลู่เข้าสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขของอนุกรม แบ่งการศึกษาออกเป็นแต่ละบทดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

บทที่ 2 : เรากล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่จำเป็นในการศึกษาของบทที่ 3 และบทที่ 4 ซึ่งได้แก่ ลิมิตและความต่อเนื่อง กฎของโลปิตาล รวมทั้งอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

บทที่ 3 : เราจะศึกษาลำดับของจำนวนจริง และแนวคิดต่าง ๆ ของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าและการลู่ออกของลำดับ การมีขอบเขตของลำดับ การเป็นลำดับโมโนโทนและลำดับโคชี นอกจากนี้เราศึกษาทฤษฎีบทของโบลซาโน – ไวแยร์สตราสส์ เราจะใช้ทฤษฎีบทนี้ในการพิสูจน์สมบัติที่สำคัญบางประการของลำดับ

บทที่ 4 : เราจะศึกษาอนุกรมของจำนวนจริงและการลู่เข้า รวมทั้งศึกษาการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม การลู่เข้าสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข อนุกรมสลับ นอกจากนี้เราศึกษาการทดสอบการลู่เข้าแบบอื่น ๆ และผลคูณของอนุกรม พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

บทที่ 2
ทฤษฎีบทพื้นฐาน
(BASIC THEOREMS)

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานของลิมิตและความต่อเนื่อง กฎของโลปีตาล รวมทั้งอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ซึ่งจะนำไปใช้ในการศึกษาลำดับและอนุกรมของจำนวนจริง ในบทที่ 3 และบทที่ 4 ต่อไป ดังนั้นเราจะละการพิสูจน์ ผู้ที่สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [1] และ [3]

ในการค้นคว้าอิสระนี้จะขอกำหนดสัญลักษณ์แทนเซตต่างๆ ดังนี้

I^+	แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด
R	แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด
$A \subset B$	แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B
$D(f)$	แทนโดเมนของฟังก์ชัน f

และถ้าไม่กล่าวถึงเป็นอย่างอื่น เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน จะหมายถึงฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

บทนิยาม 2.1 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามในอาณาเขตหนึ่งของ a ซึ่งอาจยกเว้นที่ a และ l เป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า l เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a (limit of f as x approaches a)** และเขียนแทนโดย $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in D(f)$ เมื่อ $0 < |x - a| < \delta$

บทนิยาม 2.2 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ในอาณาเขตหนึ่งของ a ซึ่งอาจยกเว้นที่ a และ l เป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า l เป็น**ลิมิตซ้ายของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย (limit of f as x approaches a from the left)** และเขียนแทนโดย $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in D(f)$ เมื่อ $a - \delta < x < a$

และจะกล่าวว่า l เป็น**ลิมิตขวาของ** f **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **ทางขวา** (**limit of** f **as** x **approaches** a **from the right**) และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่ง $|f(x)-l|<\varepsilon$ สำหรับทุก $x\in D(f)$ เมื่อ $a<x<a+\delta$

นอกจากนี้เรานิยาม $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งสอดคล้อง $|f(x)-l|<\varepsilon$ เมื่อ $x>N$

และ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $N>0$ ซึ่งสอดคล้อง $|f(x)-l|<\varepsilon$ เมื่อ $x<-N$

บทนิยาม 2.3 : กำหนดให้ $D\subset R$ และ $f:D\to R$ เป็นฟังก์ชัน ให้ $a\in D$ เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องที่** a (**continuous at** a) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งสอดคล้อง $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ สำหรับทุก $x\in D(f)$ เมื่อ $0<|x-a|<\delta$

บทนิยาม 2.4 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่** a (**continuous from the left at** a) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

และกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่** a (**continuous from the right at** a) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

บทนิยาม 2.5 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด** (a,b) (**continuous function on open interval** (a,b)) ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก $x\in(a,b)$

บทนิยาม 2.6 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด** $[a,b]$ (**continuous function on closed interval** $[a,b]$) ถ้า f สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) f ต่อเนื่องบน (a,b)

(2) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x=a$

(3) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x=b$

บทนิยาม 2.7 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ที่** a **(differentiable at** a **)** ถ้า $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ หาค่าได้ และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์ของ** f **ที่** a **(derivative of** f **at** a **)** ซึ่งเขียนแทนโดย $f'(a)$

บทนิยาม 2.8 : กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆ เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หา**อนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด** I **(differentiable on** I **)** ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดในช่วง I

บทนิยาม 2.9 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=0$ เรากล่าวว่า $\dfrac{f}{g}$ อยู่ใน**รูปแบบไม่กำหนด** $\dfrac{0}{0}$ **(indeterminate form** $\dfrac{0}{0}$ **)** และเขียนแทนอย่างสั้น ๆ โดย $I.F.\dfrac{0}{0}$

บทนิยาม 2.10 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=0$ เรากล่าวว่า $\dfrac{f}{g}$ อยู่ใน**รูปแบบไม่กำหนด** $\dfrac{\infty}{\infty}$ **(indeterminate form** $\dfrac{\infty}{\infty}$ **)** และเขียนแทนอย่างสั้น ๆ โดย $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$

ทฤษฎีบท 2.11 : กฎของโลปิตาล (L' Hopital's Rule) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) และ $g'(x)\neq 0$ สำหรับทุกค่า $x\in(a,b)$ ถ้ามี $x_0\in(a,b)$ ซึ่ง $\lim_{x\to x_0} f(x)=0=\lim_{x\to x_0} g(x)$ และ $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ หรือ มีค่าเท่ากับ $\pm\infty$ แล้ว $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

หมายเหตุ 2.12 :

(1) กฎของโลปิตาลยังใช้ได้กับเมื่อ $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty=\lim_{x\to x_0} g(x)$

(2) กฎของโลปิตาลสามารถขยายไปถึงกรณีที่ $x\to\pm\infty$ และกรณีที่ $x\to x_0^{-}$ และ $x\to x_0^{+}$

(3) สำหรับรูปแบบของลิมิตที่จัดว่าเป็นรูปแบบไม่กำหนดนอกจากรูปแบบ $I.F.\frac{0}{0}$ และ $I.F.\frac{\infty}{\infty}$ ยังมีอีกหลายรูปแบบซึ่งสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบ $I.F.\frac{0}{0}$ และ $I.F.\frac{\infty}{\infty}$ แล้วสามารถใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณหาค่าลิมิตได้เช่นเดียวกัน ซึ่งในที่นี้ไม่ได้กล่าวถึง

บทนิยาม 2.13 : กำหนดให้ $f(x)$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,u]$ สำหรับทุก $u > a$ นิยาม**อิมพรอบเพออินทิกรัล (improper integral)** ของ f เขียนแทนโดย $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ดังนี้

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_a^{u} f(x)\,dx \qquad (1)$$

กล่าวว่า $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า ถ้าลิมิตทางขวามือของ (1) เป็นค่าจำกัดไม่เช่นนั้นกล่าวว่า $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก

บทที่ 3
ลำดับของจำนวนจริง
(SEQUENCES OF REAL NUMBERS)

ลำดับของจำนวนจริงเป็นพื้นฐานของอนุกรมของจำนวนจริง ในบทนี้เราจะศึกษาลำดับของจำนวนจริง และแนวคิดต่าง ๆ ของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าและการลู่ออกของลำดับ การมีขอบเขตของลำดับ การเป็นลำดับโมโนโทน และลำดับโคชี นอกจากนี้เราศึกษาทฤษฎีบทของโบลซาโน – ไวแยร์สตราสส์ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญ ในการค้นคว้าอิสระนี้เราจะใช้ทฤษฎีบทของโบลซาโน – ไวแยร์สตราสส์ พิสูจน์สมบัติบางประการของลำดับ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับการลู่เข้าของลำดับ

3.1 บทนิยามเบื้องต้น (Basic Definitions)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาบทนิยามต่าง ๆ ของลำดับของจำนวนจริง ได้แก่การลู่เข้า การลู่ออก การมีขอบเขต และการเป็นลำดับโมโนโทน พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

บทนิยาม 3.1.1 : ลำดับของจำนวนจริง (sequence of real numbers) คือฟังก์ชัน

$$f : I^+ \to R$$

สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $f(n) = x_n$ เรียก x_n ว่า**เทอมที่** n (n^{th} $term$) ของลำดับ และจะแทนลำดับนี้โดย $\{x_n\}$ หรือ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$

จะขอตกลงในที่นี้ว่าถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่น เมื่อกล่าวถึงลำดับในสารนิพนธ์นี้จะหมายถึงลำดับของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 3.1.2 : ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับ

1) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

2) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$

3) $\{x_n\} = \left\{(-1)^n\right\}$ ●

บทนิยาม 3.1.3 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับและ L เป็นจำนวนจริง ลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่เข้าสู่** L **(converges to** L **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งถ้า $n > N$ แล้ว $|x_n - L| < \varepsilon$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า L เป็น**ลิมิต (limit)** ของลำดับ $\{x_n\}$ และเขียนแทนด้วย $\lim x_n = L$ หรือ $\{x_n\} \to L$

บทนิยาม 3.1.4 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ถ้ามีจำนวนจริง L ซึ่ง $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L เรากล่าวว่า $\{x_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)**

ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\{x_n\}$ ไม่มีลิมิต เรากล่าวว่า $\{x_n\}$ เป็น**ลำดับลู่ออก (divergent sequence)** นั่นคือ L ไม่เป็นลิมิตของ $\{x_n\}$ สำหรับทุกจำนวนจริง L

ข้อสังเกต 3.1.5 : เห็นได้ชัดว่า ถ้า $x_n = c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ สำหรับทุก $n \in I^+$ แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ c

ในการพิสูจน์เกี่ยวกับลำดับจำเป็นต้องอาศัยหลักอาร์คีมีดิส ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปนี้โดยละการพิสูจน์

หลักอาร์คีมีดิส (Archimedean Principle) : ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ b เป็นจำนวนจริง แล้วมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $na > b$

นั่นคือ เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก m, n ซึ่งสอดคล้อง

$$m > \varepsilon \ , \ \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ตัวอย่าง 3.1.6 : สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $x_n = 1 + \frac{1}{2n}$ จงแสดงว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ 1

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{2\varepsilon}$

ดังนั้น $\frac{1}{N} < 2\varepsilon$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < 2\varepsilon$$

และ

$$|x_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{2n} - 1\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ 1 ●

ตัวอย่าง 3.1.7 : ให้ $x_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ จงแสดงว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ 2

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

ดังนั้น $\frac{1}{N^2} < \varepsilon$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} < \varepsilon$$

และ

$$|x_n - 2| = \left|2 - \frac{1}{n^2} - 2\right| = \left|-\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ 2 ●

ตัวอย่าง 3.1.8 : ให้ $x_n = (-1)^n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ จงแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : สมมติว่ามีจำนวนจริง L ซึ่ง $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และให้ $\varepsilon = 1$

โดยบทนิยาม 3.1.3 จะมี $N \in I^+$ ซึ่ง

$$\left|(-1)^n - L\right| < 1 \qquad \text{สำหรับทุก } n > N$$

เนื่องจาก

$$1 - L \le |1 - L| = \left|(-1)^{2N} - L\right| < 1$$

ดังนั้น $L > 0$ และ

$$1 + L \le |1 + L| = |-(1 + L)| = |-1 - L| = \left|(-1)^{2N+1} - L\right| < 1$$

ดังนั้น $L < 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 3.1.9 : ให้ $x \in R$ และ $x \geq 0$ ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $x_n \geq 0$ ทุก n และ $\lim x_n = x$ แล้ว $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $x \in R$ ซึ่ง $x \geq 0$ และให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim x_n = x$ พิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $x = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|x_n - 0| = |x_n| = x_n < \varepsilon^2 \qquad \text{สำหรับทุก } n > N$$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{0}\right| = \left|\sqrt{x_n}\right| = \sqrt{x_n} < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n > N$$

ดังนั้น $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$

กรณีที่ 2 : $x > 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|x_n - x| < \sqrt{x}\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n > N$$

พิจารณาจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| &= \left|\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right)\left[\frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}\right]\right| \\
&= \frac{|x_n - x|}{\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right)} \\
&\leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$ ●

บทนิยาม 3.1.10 : ลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่ออกสู่บวกอนันต์ (diverges to infinity)** ก็ต่อเมื่อ ถ้า M เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้อง $x_n > M$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim x_n = \infty$ หรือ $\{x_n\} \to \infty$

ตัวอย่าง 3.1.11 : ให้ $x_n = n^2$ จงแสดงว่า $\{x_n\} \to \infty$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $M > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \sqrt{M}$
ดังนั้น

$$N^2 > M$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$x_n = n^2 > N^2 > M$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\} \to \infty$ ●

บทนิยาม 3.1.12 : ลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่ออกสู่ลบอนันต์ (diverges to negative infinity)** ก็ต่อเมื่อ ถ้า K เป็นจำนวนจริงลบใด ๆ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้อง $x_n < K$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim x_n = -\infty$ หรือ $\{x_n\} \to -\infty$

ตัวอย่าง 3.1.13 : ให้ $x_n = -2n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จงแสดงว่า $\{x_n\} \to -\infty$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $K < 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > -\dfrac{K}{2}$
ดังนั้น

$$-2N < K$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$-2n < -2N < K$$

ดังนั้น

$$x_n < K$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\} \to -\infty$ ●

บทนิยาม 3.1.14 : ลำดับ $\{x_n\}$ **มีขอบเขต (bounded)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|x_n| \le M$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

บทนิยาม 3.1.15 : กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ

(1) ถ้า $x_{n+1} \ge x_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็น**ลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น (monotone increasing sequence)**

(2) ถ้า $x_n \geq x_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in I^+$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็น**ลำดับโมโนโทนแบบลดลง (monotone decreasing sequence)**

เราเรียกลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งสอดคล้อง (1) หรือ (2) ว่า**ลำดับโมโนโทน (monotone sequence)**

ตัวอย่าง 3.1.16 : ลำดับในข้อ 1 และข้อ 2 เป็นตัวอย่างของลำดับโมโนโทน ส่วนลำดับในข้อ 3 และข้อ 4 ไม่เป็นลำดับโมโนโทน

1) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},...,\frac{n}{n+1},...$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น เพราะว่า

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

2) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},...$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง เพราะว่า

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{n+1}\cdot n = \frac{n}{n+1} < 1$$

3) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},...$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทน เพราะว่าเทอมที่ 1 มากกว่าเทอมที่ 2 แต่เทอมที่ 2 มีค่าน้อยกว่าเทอมที่ 3

4) $2,4,3,5,...$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทน เพราะว่าเทอมที่ 1 น้อยกว่าเทอมที่ 2 แต่เทอมที่ 2 มีค่ามากกว่าเทอมที่ 3 ●

บทนิยาม 3.1.17 : ขอบเขตบน (upper bound) ของลำดับ $\{x_n\}$ คือ จำนวนจริง u ซึ่งสอดคล้องว่า $x_n \leq u$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

บทนิยาม 3.1.18 : จำนวนจริง u เป็น**ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (least upper bound)** ของลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า u สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) u เป็นขอบเขตบนของ $\{x_n\}$

(2) ถ้าจำนวนจริง b เป็นขอบเขตบนของ $\{x_n\}$ แล้ว $b \geq u$

บทนิยาม 3.1.19 : ขอบเขตล่าง (lower bound) ของลำดับ $\{x_n\}$ คือจำนวนจริง l ซึ่งสอดคล้องว่า $l \leq x_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

บทนิยาม 3.1.20 : จำนวนจริง l เป็น**ขอบเขตล่างค่ามากสุด (greatest lower bound)** ของลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า l สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) l เป็นขอบเขตล่างของ $\{x_n\}$

(2) ถ้าจำนวนจริง a เป็นขอบเขตล่างของ $\{x_n\}$ แล้ว $l \geq a$

เราสามารถนิยามขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซต A ใด ๆ ได้ในลักษณะเดียวกันกับของลำดับ

ผลของบทนิยาม 3.1.14 บทนิยาม 3.1.17 และบทนิยาม 3.1.19 จะได้ข้อสังเกตต่อไปนี้

ข้อสังเกต 3.1.21 : ลำดับ $\{x_n\}$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ตัวอย่าง 3.1.22 : ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างลำดับมีขอบเขตและลำดับไม่มีขอบเขต

1) ลำดับ $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต เพราะว่า $\left|\frac{2}{n}\right| \leq 2$ สำหรับทุก $n \in I^+$

2) ลำดับ $\left\{(-1)^n\right\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต เพราะว่า $\left|(-1)^n\right| = 1$ สำหรับทุก $n \in I^+$

3) ลำดับ $\{n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตล่าง แต่ไม่มีขอบเขตบน ดังนั้น $\{n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

4) ลำดับ $\left\{(-1)^n n\right\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตล่าง และไม่มีขอบเขตบน ●

3.2 ทฤษฎีบทของลำดับ (Theorems of Sequences)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับลู่เข้า ลำดับมีขอบเขตและลำดับโมโนโทน นอกจากนี้เราศึกษาทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่แสดงให้เห็นถึงลักษณะของลิมิตว่ามีลักษณะเฉพาะเช่นเดียวกับเทอมของลำดับ

ทฤษฎีบท 3.2.1 : ถ้าลำดับของจำนวนจริงเป็นลำดับลู่เข้า แล้วลำดับจะมีลิมิตเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
ให้ L และ M เป็นลิมิตของ $\{x_n\}$
จะแสดงว่า $L = M$ สมมติให้ $L \neq M$ ดังนั้น $L - M \neq 0$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|L-M|$ เนื่องจาก $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

เพราะฉะนั้น จะมี $N_1 \in I^+$ ซึ่งสอดคล้อง

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n > N_1$$

และเนื่องจาก $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ M เพราะฉะนั้น จะมี $N_2 \in I^+$ ซึ่งสอดคล้อง

$$|x_n - M| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n > N_2$$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ ให้ $n = N+1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2\varepsilon = |L-M| &= |L - x_n + x_n - M| \\ &\le |L - x_n| + |x_n - M| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $L = M$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.2 : ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า จำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งไม่อยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ เป็นค่าจำกัด

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ให้ $\varepsilon > 0$
โดยบทนิยาม 3.1.3 จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้อง

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n > N$$

ดังนั้น

$$-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

นั่นคือ

$$x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad \text{สำหรับทุก } n > N$$

เพราะฉะนั้น เทอมของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งไม่อยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ มีได้อย่างมาก N เทอม

$(\leftarrow)$ กำหนดว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งไม่อยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ เป็นค่าจำกัด

เราจะแสดงว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ให้ $\varepsilon > 0$

สมมติเทอมทั้งหมดของลำดับ $\{x_n\}$ ที่ไม่อยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ คือ

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$$

เมื่อ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$

เลือก $N = n_k$ ดังนั้น ทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ จะได้ว่า

$$x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

นั่นคือ

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก} \quad n > N$$

เพราะฉะนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ●

ทฤษฎีบท 3.2.3 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L เลือก $\varepsilon = 1$
ดังนั้น มี $N \in I^+$ ซึ่งสอดคล้อง

$$|x_n| - |L| \le |x_n - L| < 1 \quad \text{สำหรับทุก} \quad n > N$$

นั่นคือ

$$|x_n| \le 1 + |L| \quad \text{สำหรับทุก} \quad n > N$$

เลือก $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, 1 + |L|\}$
ดังนั้น ทุก $n \in I^+$ จะได้ว่า

$$|x_n| \le M$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ●

ทฤษฎีบท 3.2.4 : ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้ว

(1) $\{a_n + b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a + b$

(2) $\{ca_n\}$ ลู่เข้าสู่ ca เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(3) $\{a_n b_n\}$ ลู่เข้าสู่ ab

(4) ถ้า $b \ne 0$ และ $b_n \ne 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{a}{b}$

(5) $\{|a_n|\}$ ลู่เข้าสู่ $|a|$

(6) $\lim|a_n| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim a_n = 0$

พิสูจน์ : (1) กำหนดให้ $\varepsilon > 0$
เนื่องจาก $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่งถ้า $n > N_1$ แล้ว

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

และเนื่องจาก $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่งถ้า $n > N_2$ แล้ว

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า ถ้า $n > N$ แล้ว

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\{a_n + b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a + b$

(2) ให้ $\varepsilon > 0$ จะพิจารณาค่า c เป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 : $c = 0$

เพราะฉะนั้น $ca_n = 0$ ดังนั้น $\{ca_n\}$ ลู่เข้าสู่ $0 = ca$

กรณีที่ 2 : $c \ne 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $|c| > 0$ และ $\frac{\varepsilon}{|c|} > 0$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\{ca_n\}$ ลู่เข้าสู่ ca

(3) ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a

ดังนั้น จะมี $N_1 \in I^+$ ซึ่ง ถ้า $n \ge N_1$ แล้ว

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง

$$|a_n| \le M \quad \text{ทุก } n \in I^+$$

และเนื่องจาก $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b

ดังนั้น จะมี $N_2 \in I^+$ ซึ่ง ถ้า $n \ge N_2$ แล้ว

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ แล้วได้ว่าสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\le |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\{a_n b_n\}$ ลู่เข้าสู่ ab

(4) ให้ $\varepsilon > 0$

จะหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - ab_n}{b_n b}\right| \\
&= \frac{1}{|b_n b|}|a_n b - ab + ab - ab_n| \\
&\le \frac{|b||a_n - a|}{|b_n b|} + \frac{|a||b - b_n|}{|b_n b|} \\
&= \frac{1}{|b_n|}|a_n - a| + \frac{|a|}{|b_n b|}|b - b_n|
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b และ $b \neq 0$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$

ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n > N_1$$

สำหรับทุก $n > N_1$ จะได้ว่า

$$|b| = |b - b_n + b_n| \le |b_n - b| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n|$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n > N_1$$

หรือ

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|b|} \quad \text{สำหรับทุก } n > N_1$$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่งถ้า $n > N_2$ แล้ว

$$|a_n - a| < \frac{|b|}{4}\varepsilon$$

และเนื่องจาก $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก N_3 ซึ่งถ้า $n > N_3$ แล้ว

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{4(|a|+1)}$$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ สำหรับทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &\le \frac{1}{|b_n|}|a_n - a| + \frac{|a|}{|b_n b|}|b_n - b| \\
&< \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{|a|}{|b|}\frac{2}{|b|}|b_n - b| \\
&< \frac{2}{|b|}\frac{|b|}{4}\varepsilon + \frac{|a|}{|b|}\frac{2}{|b|}\left(\frac{\varepsilon |b|^2}{4(|a|+1)}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{a}{b}$

(5) เห็นได้ชัด เนื่องจาก

$$\big|\, |a_n| - |a| \,\big| \le |a_n - a|$$

(6) เห็นได้ชัด เนื่องจาก

$$\big|\, |a_n| \,\big| = |a_n| \qquad \bullet$$

หมายเหตุ 3.2.5 : เมื่อกำหนด $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ สัญลักษณ์ $\{a_n - b_n\}$ จะแทน $\{a_n + c_n\}$ เมื่อ $c_n = (-1)b_n$ ในกรณีเช่นนี้ ถ้า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้ว $\{a_n - b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a-b$

ทฤษฎีบท 3.2.6 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $x_n \le 0$ ทุก $n \in I^+$ และ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว $L \le 0$

พิสูจน์ : สมมติ $L > 0$

เลือก $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$ เนื่องจาก $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้อง

$$|x_n - L| < \frac{L}{2} \text{ สำหรับทุก } n > N$$

ดังนั้นสำหรับทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$-\frac{L}{2} < x_n - L < \frac{L}{2}$$

หรือ

$$0 < \frac{L}{2} < x_n < \frac{3L}{2}$$

นั่นคือ

$$x_n > 0 \text{ ทุก } n > N$$

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ เพราะฉะนั้น $L \le 0$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.7 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $x_n \ge 0$ ทุก $n \in I^+$ และ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว $L \ge 0$

พิสูจน์ : สมมติ $L < 0$

เลือก $\varepsilon = -\dfrac{L}{2}$ เนื่องจาก $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้อง

$$|x_n - L| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } n > N$$

ดังนั้นสำหรับทุก $n > N$ เราได้ว่า

$$-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon$$

หรือ

$$L-\varepsilon < x_n < L+\varepsilon = \frac{L}{2} < 0$$

นั่นคือ

$$x_n < 0 \text{ ทุก } n > N$$

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ เพราะฉะนั้น $L \geq 0$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.8 :

(1) ถ้า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และ $a_n \leq K$ สำหรับทุก $n \in I^+$ แล้ว $L \leq K$

(2) ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $a_n \leq b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ถ้า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ K แล้ว $L \leq K$

(3) ถ้า $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $a_n \leq b_n \leq c_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ : (1) ให้ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และ $a_n \leq K$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ให้

$$b_n = -K$$

ดังนั้น $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $-K$ และ $\{a_n + b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $L-K$

เนื่องจาก $a_n \leq K$ และ $b_n = -K$

เพราะฉะนั้น

$$a_n + b_n \leq K - K = 0$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้ว่า $L-K \leq 0$

นั่นคือ $L \leq K$

(2) โดยหมายเหตุ 3.2.5 จะได้ว่า $\{a_n - b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $L-K$

เนื่องจาก $a_n - b_n \leq 0$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้ว่า $L-K \leq 0$

เพราะฉะนั้น $L \leq K$

(3) ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n > N_1$ และจะได้ว่า

$$L - \varepsilon < a_n$$

เนื่องจาก $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ L เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|c_n - L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n > N_2$ และจะได้ว่า

$$c_n < L + \varepsilon$$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$$

ดังนั้น $|b_n - L| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ●

ตัวอย่าง 3.2.9 : จงแสดงว่า $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

พิสูจน์ : สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $a_n = \sqrt[n]{n}$

สำหรับ $n > 1$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$

เพราะฉะนั้น

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0 \ , \ n > 1$$

และ

$$\begin{aligned} n &= (1 + x_n)^n \\ &= 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \ldots + x_n^n \\ &\ge 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \\ &\ge \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \end{aligned}$$

หรือ

$$0 < x_n^2 \le \frac{2}{n-1} \qquad \text{สำหรับทุก } n > 1$$

ดังนั้น

$$x_n \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

เนื่องจาก

$$1 \le \sqrt[n]{n} = 1 + x_n \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

และ

$$\lim\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\right) = 1$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.8 (3) จะได้ว่า $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ ●

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงสัจพจน์ความบริบูรณ์ ซึ่งนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.11

สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Axiom of Completeness) :

(1) ให้ $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \varnothing$ และ A มีขอบเขตบน แล้ว A มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

(2) ให้ $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \varnothing$ และ A มีขอบเขตล่าง แล้ว A มีขอบเขตล่างค่ามากสุด

ข้อสังเกต 3.2.10 : สัจพจน์ความบริบูรณ์ เป็นจริงในกรณีที่เราแทน A ด้วยลำดับ $\{x_n\}$

ทฤษฎีบท 3.2.11 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น และ $\{x_n\}$ มีขอบเขตบน แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น และ $\{x_n\}$ มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\{x_n\}$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด
ให้ u เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ$\{x_n\}$ ดังนั้น $u-\varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ$\{x_n\}$
นั่นคือ มี $N \in I^+$ ซึ่ง $x_N > u-\varepsilon$
ดังนั้น

$$x_n > u-\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก} \quad n > N$$

เพราะฉะนั้น

$$u-\varepsilon < x_n \le u < u+\varepsilon$$

หรือ

$$|x_n - u| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n > N$
ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ u และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ●

บทแทรก 3.2.12 :

(1) ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขตบน แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกสู่บวกอนันต์

(2) ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น และ $x_n > 0$ ทุก $n \in I^+$ ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว $L > 0$

พิสูจน์ : (1) สมมติให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น
และ $\{x_n\}$ ไม่มีขอบเขตบน
ให้ M เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ เพราะฉะนั้น M ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{x_n\}$
นั่นคือ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$x_N > M$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ จะได้ว่า

$$x_n \geq x_N > M$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกสู่บวกอนันต์

(2) โดยทฤษฎีบท 3.2.7 จะได้ว่า $L \geq 0$
สมมติ $L = 0$ ให้ $\varepsilon = \dfrac{x_1}{2}$
ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้องว่า

$$|x_n| < \varepsilon = \frac{x_1}{2}$$

สำหรับทุก $n > N$
นั่นคือ

$$x_n < \frac{x_1}{2}$$

สำหรับทุก $n > N$ ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้
เพราะฉะนั้น $L > 0$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.13 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง และ $\{x_n\}$ มีขอบเขตล่าง แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง และ $\{x_n\}$ มีขอบเขตล่าง
โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\{x_n\}$ มีขอบเขตล่างค่ามากสุด
ให้ l เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{x_n\}$ ดังนั้น $l+\varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ $\{x_n\}$
นั่นคือ มี $N \in I^+$ ซึ่ง $x_N < l+\varepsilon$
ดังนั้น

$$x_n < l+\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n > N$$

เพราะฉะนั้น

$$l-\varepsilon < l \le x_n < l+\varepsilon$$

หรือ

$$|x_n - l| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n > N$
ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ l และการพิสูจน์สิ้นสุด ●

บทแทรก 3.2.14 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง และ $\{x_n\}$ ไม่มีขอบเขตล่าง แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกสู่ลบอนันต์

พิสูจน์ : สมมติให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง และ $\{x_n\}$ ไม่มีขอบเขตล่าง
ให้ L เป็นจำนวนจริงลบใด ๆ เพราะฉะนั้น L ไม่เป็นขอบเขตล่างของ $\{x_n\}$
นั่นคือ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$x_N < L$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ จะได้ว่า

$$x_n \le x_N < L$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกสู่ลบอนันต์ ●

ตัวอย่าง 3.2.15 : จงแสดงว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้า เมื่อ $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ \dots \ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ \dots \ \cdot(2n)}$

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ \ldots\ \cdot(2n)}$

(1) จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

เนื่องจาก

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ \ldots\ \cdot(2n)(2n+2)\cdot\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ \ldots\ \cdot(2n)}} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} < 1$$

ดังนั้น

$x_{n+1} \le x_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

(2) เห็นได้ว่า 0 เป็นขอบเขตล่างของ $\{x_n\}$

โดยทฤษฎีบท 3.2.13 จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 3.2.16 : นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ดังนี้ $x_1 = \sqrt{2}$ และ $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$

(1) จงแสดงว่า $x_n \le 2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) จงแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น และ $\{x_n\}$ ลู่เข้า

(3) จงแสดงว่า $\lim x_n = 2$

พิสูจน์ : (1) จะแสดงว่า $x_n \le 2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$x_n \le 2$

จะแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(i) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า

$x_1 = \sqrt{2}$ และ $\sqrt{2} < 2$

ดังนั้น $x_1 < 2$

(ii) ให้ $k \in I^+$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ

$x_k \le 2$

จะได้ว่า

$$x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} \le \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$x_n \le 2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

เนื่องจาก

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n$$

หรือ

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = \left(1+x_n\right)\left(2-x_n\right)$$

เพราะว่า

$0 < x_n \le 2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น

$$\left(1+x_n\right)\left(2-x_n\right) \ge 0$$

นั่นคือ

$$x_{n+1}^2 \ge x_n^2$$

และจะได้ว่า

$x_{n+1} \ge x_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน ซึ่งมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 3.2.11 จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ L

(3) จะแสดงว่า $\lim x_n = 2$ ให้ $\lim x_n = x$

เนื่องจาก

$$\lim x_{n+1} = \lim \sqrt{2+x_n}$$

ดังนั้น

$$x = \sqrt{\lim\left(2+x_n\right)} = \sqrt{2+x}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$x^2 = 2 + x$ หรือ $x^2 - x - 2 = 0$

ดังนั้น

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.7 สรุปได้ว่า $x = 2$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.17 : ถ้า $A \subset R$, $A \neq \varnothing$ และ A มีขอบเขตบน แล้วจะมีลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง

(1) $x_n \in A$ ทุก $n \in I^+$

(2) $\lim x_n$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A

พิสูจน์ : โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ A มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด สมมติให้เป็น α เราจะสร้างลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \in A$ และ $\lim x_n = \alpha$

โดยแยกพิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $\alpha \in A$

ให้ $x_n = \alpha$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $x_n \in A$ และ $\lim x_n = \alpha$

กรณีที่ 2 : $\alpha \notin A$

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $\alpha - \frac{1}{n}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ A

ดังนั้น มี $x_n \in A$ ซึ่ง

$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n < \alpha$$

ในการแสดงว่า $\lim x_n = \alpha$ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้

$$\alpha - x_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น

$$|x_n - \alpha| = \alpha - x_n < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim x_n = \alpha$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.18 : ถ้า $A \subset R$, $A \neq \varnothing$ และ A มีขอบเขตล่าง แล้วจะมีลำดับของ $\{x_n\}$ ซึ่ง

(1) $x_n \in A$ ทุก $n \in I^+$

(2) $\lim x_n$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A

พิสูจน์ : โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ A มีขอบเขตล่างค่ามากสุด สมมติให้เป็น α เราจะสร้างลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \in A$ และ $\lim x_n = \alpha$ โดยแยกพิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $\alpha \in A$

ให้ $x_n = \alpha$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $x_n \in A$ และ $\lim x_n = \alpha$

กรณีที่ 2 : $\alpha \notin A$

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $\alpha + \dfrac{1}{n}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ A

ดังนั้น มี $x_n \in A$ ซึ่ง

$$\alpha \le x_n < \alpha + \frac{1}{n}$$

ในการแสดงว่า $\lim x_n = \alpha$ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้

$$|\alpha - x_n| = x_n - \alpha < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim x_n = \alpha$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.19 : ให้ $\lim a_n = a$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งทุก a_n เป็นสมาชิกของโดเมนของ f และ f ต่อเนื่องที่ a แล้วลำดับ $\{f(a_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $f(a)$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x = a$ ดังนั้น มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $|x - a| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

และเนื่องจาก $\lim a_n = a$ ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$|a_n - a| < \delta$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$|a_n - a| < \delta$$

และดังนั้น $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$

นั่นคือ $\{f(a_n)\}$ ลู่เข้าสู่ $f(a)$ ●

ข้อสังเกต 3.2.20 : ข้อสรุปในทฤษฎีบท 3.2.19 อาจไม่เป็นจริง ถ้า f ไม่ต่อเนื่อง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ถ้า } x = 0 \\ 1 & , \text{ ถ้า } x \neq 0 \end{cases}$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ 0 ถ้ากำหนด

$$x_n = \frac{1}{n}$$

แล้ว $\lim x_n = 0$ แต่

$$\lim f(x_n) = 1 \neq f(\lim x_n) = 0 \qquad \bullet$$

ทฤษฎีบท 3.2.21 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน นิยามบนช่วง $[b,\infty)$ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $x_n = f(n)$ สำหรับทุก $n \geq b$ ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\lim x_n = L$

พิสูจน์ : ต้องการแสดงว่า $\lim x_n = L$ ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ดังนั้นจะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง ถ้า $x > M$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq M$ ให้ $n > N$ จะได้ว่า

$$|x_n - L| = |f(n) - L| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim x_n = L$ $\bullet$

ตัวอย่าง 3.2.22 : จงแสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ 1 เมื่อ

$$x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

พิสูจน์ : ให้ $f : [1,\infty) \to R$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{สำหรับทุก } x \in [1,\infty)$$

เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ โดยใช้กฎของโลปิตาล

จะได้ว่า

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

กำหนดให้ $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ และ $h(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ $x\in(1,\infty)$

ดังนั้น g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[1,\infty)$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(1,\infty)$

ให้ $x\in[1,\infty)$ จะได้ว่า

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\ln\ 1=0$$

และ

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

จะได้ว่า $\frac{g}{h}$ อยู่ในรูป $I.F.\frac{0}{0}$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)=1$$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ และโดยทฤษฎีบท 3.2.21 สรุปได้ว่า $\lim x_n=1$ ●

ตัวอย่าง 3.2.23 : ให้ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ จงแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : ประการแรกจะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n^3}\right)+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n^n}\right) \\
&= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

และ

$$
x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}
$$

$$
x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \\
&= 1+1+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

จะได้ว่า

$$
\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
$$

ดังนั้น $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น

ต่อไปจะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ให้ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|x_n| &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\frac{1}{n^n} \\
&= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right] \\
&= 2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\middle/1-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&< 3
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 3.2.10 สรุปได้ว่า $\{x_n\}$ มีลิมิต สมมติให้เป็น x

เนื่องจาก x เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{x_n\}$ ดังนั้น

$$x \geq x_1 = 2$$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $x = e$ โดยจะแสดงว่า $\ln x = 1$

เพราะว่า $\ln x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(0,\infty)$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.19 จะได้ว่า

$$\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \text{ ลู่เข้าสู่ } \ln x$$

แต่โดยตัวอย่าง 3.2.22 เราทราบว่า

$$\lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

เพราะฉะนั้น $\ln x = 1$ นั่นคือ $x = e$ ●

3.3 ลำดับย่อย (Subsequences)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาลำดับย่อย ซึ่งมีความสัมพันธ์กับการลู่เข้าของลำดับและมีความสัมพันธ์กับอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 3.3.1 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$

เรากล่าวว่า $\{x_{n_k}\}$ เป็น**ลำดับย่อย (subsequence)** ของลำดับ $\{x_n\}$

ข้อสังเกต 3.3.2 : สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก k จะได้ว่า

$$n_k \geq k$$

ตัวอย่าง 3.3.3 : ให้ $x_n = (-1)^n$ และ $n_k = 2k$

ดังนั้นลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ คือลำดับ $1,1,1,\ldots$

ถ้าให้ $n_k = 2k+1$

ดังนั้นลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ คือลำดับ $-1,-1,-1,\ldots$ ●

ตัวอย่าง 3.3.4 : ให้ $x_n = \dfrac{n}{2}$ และ $n_k = 2k+1$

ดังนั้นลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ คือลำดับ $\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2},\ldots$ ●

บทนิยาม 3.3.5 : ลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่เข้าสู่** L ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก K ซึ่งถ้า $k > K$ แล้ว $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$

บทนิยาม 3.3.6 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เราเรียกจำนวนจริง L ว่า**ลิมิตย่อย (subsequential limit)** ของลำดับ $\{x_n\}$ ถ้ามีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ L

ตัวอย่าง 3.3.7 : ให้ $x_n = (-1)^n$ และ $n_k = 4k+5$

ดังนั้นลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ คือลำดับ

$$x_9, x_{13}, x_{17}, x_{21}, \ldots$$

เห็นได้ว่า -1 เป็นลิมิตของ $\{x_{n_k}\}$ ดังนั้น -1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$
ถ้า $n_k = 6k+2$ แล้วลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ 1
ดังนั้น 1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ เช่นกัน ●

ทฤษฎีบท 3.3.8 : ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และ $\{x_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$
เราจะแสดงว่า $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ L
ให้ $\varepsilon > 0$
เนื่องจากลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L
ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

พิจารณาจำนวนเต็มบวก $k > N$ จะได้ว่า

$$n_k \geq k > N$$

ดังนั้น

$$|x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

นั่นคือ ลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ L

$(\leftarrow)$ เนื่องจาก $\{x_n\}$ เป็นลำดับย่อยหนึ่งของ $\{x_n\}$ กล่าวคือ
ให้ $n_k = k$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k
ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ●

ทฤษฎีบท 3.3.9 : จำนวนจริง L เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ ก็ต่อเมื่อ ช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ มีจำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ เป็นค่าอนันต์ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ L เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$
ดังนั้น จะมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ L
ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก K ซึ่งถ้า $k > K$ แล้ว

$$|x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

นั่นคือ สำหรับทุก $k > N$ เราได้ว่า

$$x_{n_k} \in \left(L-\varepsilon, L+\varepsilon\right)$$

เพราะฉะนั้นจำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งอยู่ในช่วง $\left(L-\varepsilon, L+\varepsilon\right)$ เป็นค่าอนันต์

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ช่วง $\left(L-\varepsilon, L+\varepsilon\right)$ มีจำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ เป็นค่าอนันต์

ให้ $\varepsilon = 1$ ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก n_1 ซึ่ง $x_{n_1} \in \left(L-1, L+1\right)$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก $n_2 > n_1$ ซึ่ง $x_{n_1} \in (L-\dfrac{1}{2}, L+\dfrac{1}{2})$

โดยทั่วไปสำหรับจำนวนเต็มบวก k จะมี $n_k > n_{k-1}$ ซึ่ง

$$x_{n_k} \in (L-\frac{1}{k}, L+\frac{1}{k})$$

จะแสดงว่า $\left\{x_{n_k}\right\}$ ลู่เข้าสู่ L

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก K ซึ่ง

$$\frac{1}{K} < \varepsilon$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก $k > K$ จะได้ว่า

$$x_{n_k} \in (L-\frac{1}{k}, L+\frac{1}{k})$$

หรือ

$$\left|x_{n_k} - L\right| < \frac{1}{k} < \frac{1}{K} < \varepsilon$$

ดังนั้น L เป็นลิมิตย่อยของลำดับ $\{x_n\}$ ●

บทแทรก 3.3.10 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง แล้ว L เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ ก็ต่อเมื่อ ให้ $\varepsilon > 0$ และ N เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีจำนวนเต็มบวก $n > N$ ซึ่ง $\left|x_n - L\right| < \varepsilon$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ L เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ดังนั้น จะมี ลำดับย่อย $\left\{x_{n_k}\right\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $\left\{x_{n_k}\right\}$ ลู่เข้าสู่ L

ให้ $\varepsilon > 0$ และให้ N เป็นจำนวนเต็มบวก

สมมติทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้

$$x_n \notin \left(L-\varepsilon, L+\varepsilon\right)$$

ดังนั้น ช่วง $\left(L-\varepsilon, L+\varepsilon\right)$ มีจำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ อย่างมาก N เทอม

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3.3.9 ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก $n > N$ ซึ่ง

$x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$(\leftarrow)$ ให้ $\varepsilon > 0$

จะแสดงว่า ช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ มีจำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ เป็นค่าอนันต์

พิจารณา $N = 1$ จากสิ่งที่กำหนดให้ จะมี $n_1 > N$ ซึ่ง

$x_{n_1} \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

พิจารณา $N = n_1$ จากสิ่งที่กำหนดให้ จะมี $n_2 > n_1$ ซึ่ง

$x_{n_2} \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

.

.

.

พิจารณา $N = n_k$ จากสิ่งที่กำหนดให้ จะมี $n_{k+1} > n_k$ ซึ่ง

$x_{n_{k+1}} \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะเห็นได้ว่าจำนวนเทอมของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง

อยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ เป็นค่าอนันต์

โดยทฤษฎีบท 3.3.9 จะได้ว่า L เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ ●

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่าถ้าลำดับย่อยของเทอมคู่ และลำดับย่อยของเทอมคี่มีลิมิตเดียวกัน แล้วลำดับจะเป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.3.11 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\{x_{2n}\}$ ลู่เข้าสู่ L และ $\{x_{2n+1}\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้

$b_n = x_{2n}$ และ $c_n = x_{2n+1}$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง ถ้า $n > N_1$ แล้ว

$|b_n - L| < \varepsilon$

และเนื่องจาก $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง ถ้า $n > N_2$ แล้ว

$|c_n - L| < \varepsilon$

เลือก $N = \max\{2N_1, 2N_2+1\}$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n > N$ จะแยกพิจารณา n เป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 : n เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $n = 2k$

เนื่องจาก $n > 2N_1$

ดังนั้น $2k > 2N_1$ หรือ $k > N_1$

เพราะฉะนั้น

$$|x_n - L| = |x_{2k} - L| = |b_k - L| < \varepsilon$$

กรณีที่ 2 : n เป็นจำนวนคี่ (เนื่องจาก $n > N$ ดังนั้น $n > 1$)

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $n = 2k+1$

เนื่องจาก $n > 2N_2 + 1$

ดังนั้น $2k+1 > 2N_2 + 1$ หรือ $k > N_2$

เพราะฉะนั้น

$$|x_n - L| = |x_{2k+1} - L| = |c_k - L| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ●

3.4 ทฤษฎีบทของโบลซาโน - ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano – Weierstrass Theorem)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ ซึ่งจะนำไปใช้ในการพิสูจน์สมบัติของลำดับในทฤษฎีบท 3.4.5

บทนิยาม 3.4.1 : สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $A_n = [a_n, b_n]$ เป็นช่วงปิด แล้วสัญลักษณ์ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ จะแทน $\{x : x_n \in A_n$ สำหรับทุก $n \in I^+\}$

ทฤษฎีบท 3.4.2 : ทฤษฎีบทช่วงสอดแทรก (Nested intervals theorem)

ให้ $A_n = [a_n, b_n]$ เป็นลำดับของช่วงปิด ซึ่ง $A_n \supset A_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ถ้า $\lim(b_n - a_n) = 0$ แล้ว จะมีจำนวนจริง p ซึ่ง $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{p\}$

พิสูจน์ : ให้ $A_n \supset A_{n+1}$ ดังนั้นจะได้ว่า $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$

นั่นคือ ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลง
จะได้ว่า ทุกเทอมของลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ อยู่ใน A_1
ดังนั้นลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต
เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
ให้ $\lim a_n = a$ และ $\lim b_n = b$

สำหรับทุก $n \in I^+$ จะได้ว่า

$$a_n \le a \quad \text{และ} \quad b \le b_n$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} b - a &= \lim b_n - \lim a_n \\ &= \lim(b_n - a_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $b = a$

เนื่องจาก $a_n \le a \le b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ดังนั้น $p = a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

ถ้ามี $x \neq p$ ซึ่ง $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

ดังนั้น $x < p$ หรือ $x > p$
ถ้า $x < p$ แล้ว x ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$
และเราสรุปได้ว่า มี n ซึ่ง $x < a_n$
เพราะฉะนั้น $x \notin A_n$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
ถ้า $x > p$ แล้วจะเกิดข้อขัดแย้งเช่นเดียวกัน
นั่นคือ มีจำนวนจริง p เพียงค่าเดียว ซึ่ง $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ●

บทนิยาม 3.4.3 : ให้ $A \subset R$ จะกล่าวว่าจำนวนจริง x เป็น**จุดลิมิต (limit point)** ของเซต A ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จำนวนสมาชิกของ A ซึ่งอยู่ในช่วง $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ เป็นค่าอนันต์

ทฤษฎีบท 3.4.4 : ทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์

ทุกเซตอนันต์ซึ่งเป็นเซตมีขอบเขตจะมีจุดลิมิต

พิสูจน์ : เนื่องจาก A เป็นเซตมีขอบเขต ดังนั้นมี $M > 0$ ซึ่ง $A \subset [-M, M]$

แบ่งช่วง $[-M,M]$ ออกเป็น 2 ช่วงปิด คือ $[-M,0]$ และ $[0,M]$
เนื่องจาก A เป็นเซตอนันต์ ดังนั้นอย่างน้อยช่วงใดช่วงหนึ่งใน 2 ช่วงปิด จะมีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์ เลือกช่วงปิดที่มีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์มาช่วงหนึ่ง สมมติให้เป็น A_1 เห็นได้ว่าความกว้างของช่วง A_1 คือ M
ต่อไปแบ่งช่วงปิด A_1 ออกเป็นช่วงปิด 2 ช่วงที่มีความกว้างเท่ากัน เราสรุปได้เช่นเดียวกันว่ามีช่วงปิดอย่างน้อย 1 ช่วงใน 2 ช่วงปิดนี้ ซึ่งมีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์ เรียกช่วงปิดนี้ว่า A_2 เห็นได้ว่า A_2 มีความกว้างของช่วงเท่ากับ $\frac{M}{2}$
โดยกระบวนการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เราจะมีลำดับของช่วงปิด $\{A_n\}$ เมื่อ

$$A_n \supset A_{n+1} \qquad , \quad n = 1,2,3,...$$

และความกว้างของช่วง A_n เท่ากับ $\frac{M}{2^{n-1}}$
นอกจากนี้ ถ้า $A_n = [a_n, b_n]$ แล้วเราได้ว่า

$$\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{M}{2^{n-1}} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 3.4.2 จะได้ว่า $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{p\}$

จะแสดงว่า p เป็นจุดลิมิตของ A ให้ $\varepsilon > 0$
เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\frac{2M}{2^N} < \varepsilon$
เราจะแสดงว่า $A_N \subset (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$

ประการแรกจะแสดงว่า

$$A_N \subset \left[p - \frac{M}{2^{N-1}}, p + \frac{M}{2^{N-1}} \right] \tag{1}$$

เนื่องจาก

$$p - a_N \le \frac{M}{2^{N-1}} \qquad , \qquad b_N - p \le \frac{M}{2^{N-1}}$$

ดังนั้น

$$A_N \subset \left[p - \frac{M}{2^{N-1}}, p + \frac{M}{2^{N-1}} \right]$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า

$$\left[p - \frac{M}{2^{N-1}}, p + \frac{M}{2^{N-1}} \right] \subset (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \tag{2}$$

เนื่องจาก $\frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon$

ดังนั้น

$$\left[p-\frac{M}{2^{N-1}}, p+\frac{M}{2^{N-1}}\right] \subset \left(p-\varepsilon, p+\varepsilon\right)$$

โดย (1) และ (2) เราสรุปได้ว่า

$$A_N \subset \left(p-\varepsilon, p+\varepsilon\right)$$

เนื่องจาก A_N มีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์

เพราะฉะนั้น $\left(p-\varepsilon, p+\varepsilon\right)$ มีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์

นั่นคือ p เป็นจุดลิมิตของ A ●

ทฤษฎีบท 3.4.5 : ลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และให้ $A=\{x_n : n \in I^+\}$

พิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : A เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น มี $L \in A$ ซึ่ง $\{n : x_n = L\}$ เป็นเซตอนันต์

ให้ $n_1, n_2, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

และ $L = x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = \ldots$

เพราะฉะนั้น ลำดับย่อย $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$ ลู่เข้าสู่ L

กรณีที่ 2 : A เป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ดังนั้น A เป็นเซตอนันต์ซึ่งมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ จะได้ว่า มี p เป็นจุดลิมิตของ A

ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $\{n : x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์

โดยทฤษฎีบท 3.3.9 จะได้ว่ามี p เป็นลิมิตย่อยของลำดับ $\{x_n\}$

และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ●

บทแทรก 3.4.6 : ลำดับมีขอบเขตซึ่งเป็นลำดับลู่ออกจะมีลิมิตย่อยมากกว่า 1 ค่า

พิสูจน์ : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและเป็นลำดับลู่ออก

โดยทฤษฎีบท 3.4.5 จะได้ว่า $\{x_n\}$ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า

นั่นคือ $\{x_n\}$ มีลิมิตย่อยอย่างน้อย 1 ค่า
ถ้า $\{x_n\}$ มีลิมิตย่อยเพียง 1 ค่า
แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.3.8 สรุปว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้า ซึ่งขัดยังกับสิ่งที่กำหนดให้
ดังนั้น $\{x_n\}$ มีลิมิตย่อยมากกว่า 1 ค่า ●

ทฤษฎีบท 3.4.7 :

(1) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งไม่มีขอบเขตบน แล้ว $\{x_n\}$ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ซึ่งลู่ออกสู่บวกอนันต์

(2) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งไม่มีขอบเขตล่าง แล้ว $\{x_n\}$ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ซึ่งลู่ออกสู่ลบอนันต์

พิสูจน์ : ดูการพิสูจน์จาก [5] หน้า 54 ●

ทฤษฎีบท 3.4.8 : ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและ $\{x_n\}$ มีลิมิตย่อยเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่จำนวนจริง L
โดยทฤษฎีบท 3.4.5 จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต
และโดยทฤษฎีบท 3.3.8 เราได้ว่า ทุกลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L
ดังนั้น $\{x_n\}$ มีลิมิตย่อยเพียงค่าเดียว

$(\leftarrow)$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและ $\{x_n\}$ มีลิมิตย่อยเพียงค่าเดียว
สมมติ $\{x_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้นโดยบทแทรก 3.4.6 จะได้ว่า $\{x_n\}$ มีลิมิตมากกว่า 1 ค่า ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้
เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

บทนิยาม 3.4.9 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เรานิยาม**ลิมิตซุพีเรียร์ (limit superior)** และ**ลิมิตอินฟีเรียร์ (limit inferior)** ของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ ตามลำดับ ดังนี้

$\limsup x_n =$ ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ { $p : p$ เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ }

$\liminf x_n =$ ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{ p : p$ เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ $\}$

ข้อสังเกต 3.4.10 : $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ หาค่าได้

พิสูจน์ : **กรณีที่ 1 :** $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

จะได้ว่า $\{ p : p$ เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ $\}$ มีขอบเขตบน

ดังนั้นโดยสัจพจน์ของความบริบูรณ์ $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ หาค่าได้

กรณีที่ 2 : $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

(2a) $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขตบน แต่มีขอบเขตล่าง

โดยทฤษฎีบท 3.4.7 (1) จะได้ว่ามีลิมิตย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง

ลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ลู่ออกสู่บวกอนันต์

ดังนั้น $\limsup x_n = +\infty$ และโดยสัจพจน์ของความบริบูรณ์ $\liminf x_n$ หาค่าได้

(2b) $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขตล่าง แต่มีขอบเขตบน

ในทำนองเดียวกันกับ (2a) เราได้ว่า $\limsup x_n$ หาค่าได้ และ $\liminf x_n = -\infty$

(2c) $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขตบนและไม่มีขอบเขตล่าง

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่ากรณีนี้

$\limsup x_n = +\infty$ และ $\liminf x_n = -\infty$ ●

ทฤษฎีบท 3.4.11 : กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ให้

$E = \{ p : p$ เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ $\}$

แล้ว

(1) E มีขอบเขต

(2) E มีสมาชิกค่ามากสุด คือ u

(นั่นคือ $u \in E$ และ $u \geq x$ ทุก $x \in E$)

(3) E มีสมาชิกค่าน้อยสุด คือ l

(นั่นคือ $l \in E$ และ $l \leq x$ ทุก $x \in E$)

พิสูจน์ : ดูการพิสูจน์จาก [1] หน้า 9 ●

ตัวอย่าง 3.4.12 : จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุด ขอบเขตล่างค่ามากสุด ลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $x_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(2) $x_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n} & \text{เมื่อ } n = 3m \\ \dfrac{n+2}{2n} & \text{เมื่อ } n = 3m+1 \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{เมื่อ } n = 3m+2 \end{cases}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม m

พิสูจน์ : (1) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{x_n\}$ คือ $\dfrac{3}{2}$ และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{x_n\}$ คือ -2 ในการหาลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{x_n\}$ เราจะหาลิมิตย่อยของลำดับ $\{x_n\}$

ประการแรกจะแสดงว่า 1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ $n \ge N$ จะได้ว่า

$$1 < 1+\frac{1}{n} < 1+\varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม x_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $x_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ และสรุปได้ว่า 1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า -1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ $n \ge N$ จะได้ว่า

$$-1-\varepsilon < -1-\frac{1}{n} < -1+\varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม x_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $x_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ และสรุปได้ว่า -1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $x \in R$ ซึ่ง $x \ne 1$ หรือ $x \ne -1$ ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

กรณีที่ 1 : $x < -1$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|x+1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ $n \ge N$ จะได้ว่า

$$-1-\frac{1}{n} > x+\varepsilon$$

ดังนั้น $x_n \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \ge N$ และสรุปได้ว่า x ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

กรณีที่ 2 : $x>1$

ให้ $\varepsilon=\frac{1}{2}|x-1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N>\frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ $n\geq N$ จะได้ว่า

$$1+\frac{1}{n}<x-\varepsilon$$

ดังนั้น $x_n\notin(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n\geq N$ และสรุปได้ว่า x ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

กรณีที่ 3 : $-1<x<1$

เลือก $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{|x+1|,|x-1|\}$

เนื่องจาก $x_n<-1$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $x_n>1$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น $x_n\notin(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ สำหรับทุก n และสรุปได้ว่า x ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า ลิมิตซุพีเรียร์ของ $\{x_n\}$ คือ 1 และลิมิตอินฟีเรียร์ของ $\{x_n\}$ คือ -1

(2) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{x_n\}$ คือ $\frac{4}{3}$ และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{x_n\}$ คือ 0 ในการหา ลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{x_n\}$ เราจะหาลิมิตย่อยทั้งสองของลำดับ $\{x_n\}$

ประการแรกจะแสดงว่า 0 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ให้ $\varepsilon>0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N>\frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n=3m+2$ ซึ่ง $n\geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{N+1}<\varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม x_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $x_n\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$ และสรุปได้ว่า 0 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{1}{2}$ เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ให้ $\varepsilon>0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N>\frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n=3m+1$ ซึ่ง $n\geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{n+2}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{N}<\frac{1}{2}+\varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม x_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $x_n\in\left(\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}$ เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า 1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n = 3m$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \qquad \text{และ} \qquad 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{N} < 1 + \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม x_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $x_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

เพราะฉะนั้น 1 เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $x \in R$ ซึ่ง $x \neq 0$ หรือ $x \neq \dfrac{1}{2}$ หรือ $x \neq 1$ ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

กรณีที่ 1 : $x < 0$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{|x_n|}{2}$ พิจารณาช่วง $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (\dfrac{3x}{2}, \dfrac{x}{2})$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เห็นได้ชัดว่า $x_n \notin (\dfrac{3x}{2}, \dfrac{x}{2})$ สำหรับทุก n และสรุปได้ว่า x ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

กรณีที่ 2 : $0 < x < \dfrac{1}{2}$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\left\{|x|, \left|x - \dfrac{1}{2}\right|\right\}$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n+1} < x - \varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} > x + \varepsilon$$

หรือ

$$1 + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} > x + \varepsilon$$

ดังนั้น $x_n \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$

เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

กรณีที่ 3 : $\dfrac{1}{2} < x < 1$

เลือก $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\left\{\left|x - \dfrac{1}{2}\right|, |x-1|\right\}$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}<x-\varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{n}<x-\varepsilon$$

หรือ

$$1+\frac{1}{n}>1>x+\varepsilon$$

ดังนั้น $x_n \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสรุปได้ว่า x ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$

กรณีที่ 4 : $x>1$

ให้ $\varepsilon=\frac{1}{2}|x-1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N>\frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$1+\frac{1}{n}<x-\varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}<x-\varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{n+1}<x-\varepsilon$$

ดังนั้น $x_n \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสรุปได้ว่า x ไม่เป็นลิมิตย่อยของ $\{x_n\}$ ดังนั้นสรุปได้ว่า ลิมิตซุพีเรียร์ของ $\{x_n\}$ คือ 0 และ ลิมิตอินฟีเรียร์ ของ $\{x_n\}$ คือ 1 ●

ทฤษฎีบท 3.4.13 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต แล้ว

(1) $\limsup x_n = L$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนเทอมของ $\{x_n\}$ ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ เป็นค่าอนันต์ แต่มีจำนวนเทอมของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n > L+\varepsilon$ เป็นค่าจำกัด

(2) $\liminf x_n = K$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนเทอมของ $\{x_n\}$ ในช่วง $(K-\varepsilon, K+\varepsilon)$ เป็นค่าอนันต์ แต่มีจำนวนเทอมของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n < K-\varepsilon$ เป็นค่าจำกัด

พิสูจน์ : ดูการพิสูจน์จาก [5] หน้า 56 ●

บทแทรก 3.4.14 : กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\limsup x_n = \liminf x_n$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ x
โดยทฤษฎีบท 3.4.8 และ 3.4.11 จะได้ว่า $E=\{x\}$
เพราะฉะนั้น $l.u.b.\ E = x = g.l.b.\ E$ และ $\limsup x_n = x = \liminf x_n$

$(\leftarrow)$ เพราะว่า $l.u.b.\ E = x = g.l.b.\ E$ ดังนั้น $E=\{x\}$
เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ มีลิมิตย่อยเพียงค่าเดียว
ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.4.8 จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

3.5 ลำดับโคชี (Cauchy Sequences)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาลำดับโคชี และจะแสดงว่าลำดับของจำนวนจริงเป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับโคชี

บทนิยาม 3.5.1 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ เราเรียกลำดับ $\{x_n\}$ ว่าเป็น**ลำดับโคชี (cauchy sequence)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ และ $m > N$ แล้ว $|x_n - x_m| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 3.5.2 : ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และให้ $\varepsilon > 0$
ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } n > N$$

พิจารณาจำนวนเต็มบวก $n > N$ และ $m > N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - L + L - x_m| \\ &\le |x_n - L| + |L - x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี ●

ทฤษฎีบท 3.5.3 : ลำดับโคชีเป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี และให้ $\varepsilon = 1$
ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \text{สำหรับทุก } n, m > N$$

พิจารณา $m = N+1$ สำหรับทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \\ &\le |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| \\ &< 1 + |x_{N+1}| \end{aligned}$$

เลือก $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$
ดังนั้น $|x_n| \le M$
เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ●

ทฤษฎีบท 3.5.4 : $\{x_n\}$ ลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
โดยทฤษฎีบท 3.5.2 จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี

$(\leftarrow)$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี
โดยทฤษฎีบท 3.5.3 จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต
และโดยทฤษฎีบท 3.4.5 จะได้ว่า

$\{x_n\}$ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า

สมมติ $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ L เราจะแสดงว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L
ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี
ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n, m > N$$

เพราะว่า $\{x_{n_k}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ L
ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก $K > N$ ซึ่ง

$$|x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } k > K$$

พิจารณา $k > K$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|x_n - L| &= |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - L| \\ &= \left|\left(x_n - x_{n_k}\right) + \left(x_{n_k} - L\right)\right| \\ &\le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ●

ทฤษฎีบท 3.5.5 : หลักคอนแทรคชัน (The Contraction Principle)

ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งมี $r \in R$, $0 < r < 1$ และ $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le r|x_{n+1} - x_n|$ สำหรับทุก $n \in I^+$ แล้วได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี ในที่นี้เราสามารถกำหนดว่า $|x_2 - x_1| \ne 0$ เนื่องจาก ถ้า $x_2 = x_1$ แล้วทุก

$x_n = 0$ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $k > N_1$ แล้ว

$$r^k < \varepsilon\frac{(1-r)}{|x_2 - x_1|}$$

ให้ $N = N_1 + 1$ พิจารณา $n > m > N$ จะได้ว่า

$$|x_n - x_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\right| = \sum_{k=m}^{n-1}|x_{k+1} - x_k|$$

เนื่องจาก

$$|x_{k+1} - x_k| \le r|x_k - x_{k-1}| \le r^2|x_{k-1} - x_{k-2}| \le \ldots \le r^{k-1}|x_2 - x_1|$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &\le \sum_{k=m}^{n-1} r^{k-1}|x_2 - x_1| \\ &= r^{m-1}|x_2 - x_1|\sum_{k=0}^{n-m-1} r^{k-1} \\ &= |x_2 - x_1| r^{m-1}\frac{1 - r^{n-m}}{1-r} \\ &< |x_2 - x_1| r^{m-1}\frac{1}{1-r}\end{aligned}$$

เพราะว่า $m - 1 > N_1$ เราได้ว่า

$$r^{m-1} < \varepsilon \frac{(1-r)}{|x_2 - x_1|}$$

ทำให้ได้ว่า

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

ดังนั้น การพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ●

ตัวอย่าง 3.5.6 : นิยาม $\{x_n\}$ ดังนี้ $x_1 = 1$, $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{4}$ เมื่อ $n > 1$
จงแสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยใช้หลักคอนแทรคชัน และหาลิมิตของ $\{x_n\}$

พิสูจน์ : เนื่องจาก

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|1 + \frac{x_{n+1}}{4} - 1 - \frac{x_n}{4}\right|$$

$$= \left|\frac{x_{n+1}}{4} - \frac{x_n}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4}|x_{n+1} - x_n|$$

เพราะฉะนั้น $r = \frac{1}{4}$ ซึ่ง $0 < r < 1$ และ

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{4}|x_{n+1} - x_n|$$

ดังนั้นโดยหลักคอนแทรคชันจะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
ให้ $\lim x_n = x$ ดังนั้น

$$\lim x_n = \lim\left(1 + \frac{x_{n-1}}{4}\right)$$

หรือ

$$x = 1 + \frac{x}{4}$$

ซึ่งจะได้ว่า $x = \frac{4}{3}$ ●

ข้อสังเกต 3.5.7 : ในตัวอย่าง 3.5.6 จงพิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยแสดงว่า

(1) ลำดับ $\{x_n\}$ มี $\frac{4}{3}$ เป็นขอบเขตบน

(2) ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

พิสูจน์ : (1) จะแสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ มีขอบเขตบนเท่ากับ $\frac{4}{3}$

เนื่องจาก $x_1 = 1 < \frac{4}{3}$ เห็นได้ว่า $x_1 < \frac{4}{3}$ และถ้าให้

$x_k \le \frac{4}{3}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

แล้ว

$$x_{k+1} = 1 + \frac{x_k}{4} \le 1 + \frac{\frac{4}{3}}{4} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

ดังนั้น $x_n \le \frac{4}{3}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) จะแสดงว่า $x_n \le x_{n+1}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เพราะว่า $x_2 = 1 + \frac{x_1}{4} = 1 + \frac{1}{4} > 1 = x_1$ ถ้าให้

$x_k \ge x_{k-1}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $k > 1$

แล้ว

$$x_{k+1} = 1 + \frac{x_k}{4} \ge 1 + \frac{x_{k-1}}{4} = x_k$$

ดังนั้น $x_n \le x_{n+1}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

โดยทฤษฎีบท 3.2.11 เราสรุปได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 3.5.8 : นิยาม $\{x_n\}$ ดังนี้ ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ และให้

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad n > 2$$

จงใช้หลักคอนแทรคชันแสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ เมื่อ $n > 2$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
|x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{x_{n+1} + x_n}{2} - x_{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{x_{n+1} + x_n - 2x_{n+1}}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}|x_n - x_{n+1}| \\
&= \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $r = \dfrac{1}{2}$ ซึ่ง $0 < r < 1$

ดังนั้นโดยหลักคอนแทรคชันจะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

บทที่ 4
อนุกรมของจำนวนจริง
(SERIES OF REAL NUMBERS)

ในบทนี้เราจะศึกษาอนุกรมของจำนวนจริงและการลู่เข้า รวมทั้งศึกษาการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม การลู่เข้าสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข อีกทั้งยังศึกษาการทดสอบการลู่เข้าแบบอื่น ๆ และผลคูณของอนุกรม พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

4.1 บทนิยามของอนุกรม (Definitions of series)

บทนิยาม 4.1.1 : ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

เราเรียกลำดับ $\{S_n\}$ **ว่าอนุกรมของจำนวนจริง (series of real numbers)** และเขียนแทนอนุกรมโดย $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ หรือ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$

เรียก x_n ว่า**เทอมที่** n (n^{th} *term*) ของอนุกรม และเรียก S_n ว่า**ผลบวกย่อยที่** n (n^{th} *partial sum*) ของอนุกรม

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ด้วย $\sum x_n$

บทนิยาม 4.1.2 : ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **ลู่เข้าสู่** L **(converges to** L **)** ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ **ลู่เข้าสู่** S และเรียก L ว่า**ผลบวก (sum)** ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เขียนแทนโดย $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$

เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **ลู่ออก (diverges)** ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ **ลู่ออก**

ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่ออกสู่บวกอนันต์ แล้วเรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **ลู่ออกสู่บวกอนันต์**

และถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่ออกสู่ลบอนันต์ แล้วเรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **ลู่ออกสู่ลบอนันต์**

ตัวอย่าง 4.1.3 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

พิสูจน์ : ให้ $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim S_n = \lim\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ ●

ตัวอย่าง 4.1.4 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

พิสูจน์ : ให้
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right]$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right]$$

.

.

.

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim S_n = \lim\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right]\right) = \frac{1}{4}$$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$ ●

ทฤษฎีบท 4.1.5 : ให้ $\sum a_n$ ลู่เข้าสู่ a และ $\sum b_n$ ลู่เข้าสู่ b แล้วสำหรับจำนวนจริง α และ β จะได้ว่า $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ ลู่เข้าสู่ $\alpha a + \beta b$ นั่นคือ $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$

พิสูจน์ : ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum a_n$ และ $\{T_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum b_n$ เราจะแสดงว่า $\{\alpha S_n + \beta T_n\}$ ลู่เข้าสู่ $\alpha a + \beta b$

เนื่องจาก $\sum a_n$ ลู่เข้าสู่ a และ $\sum b_n$ ลู่เข้าสู่ b

นั่นคือ $\lim S_n = a$ และ $\lim T_n = b$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.4 จะได้ว่า

$$\lim(\alpha S_n + \beta T_n) = \alpha \lim S_n + \beta \lim T_n = \alpha a + \beta b$$ ●

ตัวอย่าง 4.1.6 : ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จงแสดงว่า $\sum(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : สมมติให้ $\sum(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
เนื่องจาก $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.5 จะได้ว่า

$$\sum\left[(a_n+b_n)+(-1)a_n\right]=\sum b_n$$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\sum(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ข้อสังเกต 4.1.7 : ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรม ลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1.8 : 1) ให้ $a_n=n$ และ $b_n=-n$
จะได้ว่า $\sum(a_n+b_n)=\sum 0=0$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
แต่ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(2) ให้ $a_n=n$ และ $b_n=n$
จะได้ว่า $\sum(a_n+b_n)=\sum 2n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
แต่ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.1.9 : ถ้า $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim x_n=0$

พิสูจน์ : ให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum x_n$
ดังนั้นมี $S\in R$ ซึ่ง $\lim S_n=S$
ให้ $\varepsilon>0$ เพราะฉะนั้นมี $N_1\in I^+$ ซึ่ง

$$|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } n>N_1$$

ให้ $N=N_1+1$ สำหรับทุก $n>N$ จะได้ว่า

$$|x_n-0|=|S_n-S_{n-1}|$$

$$= |S_n - S + S - S_{n-1}|$$
$$\le |S_n - S| + |S - S_{n-1}|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim x_n = 0$ ●

ทฤษฎีบท 4.1.10 : อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า $|r| \ge 1$

พิสูจน์ : กรณีที่ 1 : $a = 0$ จะได้ว่าทุกเทอมของอนุกรมเป็น 0 ดังนั้น อนุกรมลู่เข้าสู่ 0

กรณีที่ 2 : $a \ne 0$ ดังนั้น

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$

และ

$$rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^n$$
$$S_n - rS_n = (1-r)S_n = a - ar^n$$

ดังนั้น ถ้า $r \ne 1$ แล้ว

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim r^n = 0$

ดังนั้น $\lim S_n = \dfrac{a}{1 - r}$

ถ้า $|r| \ge 1$ แล้ว $\lim ar^n \ne 0$

ดังนั้นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.1.11 : $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in I^+$ ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $n > m > N$ แล้ว $|x_{m+1} + x_{m+2} + ... + x_n| < \varepsilon$

พิสูจน์ : เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.5.4 ●

ตัวอย่าง 4.1.12 : จงแสดงว่าอนุกรมฮาร์โมนิก $\sum\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : สมมติ $\sum\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และให้ $\lim S_n = S$ เมื่อ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum\frac{1}{n}$

พิจารณา n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} \geq n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $\lim S_n = S$ เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}$

ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $n > N$ และ $m > N$ จะได้ว่า

$$|S_n - S_m| < \frac{1}{2}$$

นั่นคือ สำหรับทุก $n > N$ จะได้

$$|S_{2n} - S_n| < \frac{1}{2}$$

และ

$$|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}$$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\sum\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.1.13 : ให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนที่ไม่เป็นลบ แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือลู่ออกสู่บวกอนันต์

พิสูจน์ : ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum x_n$

เนื่องจาก $S_{n+1} - S_n \geq 0$

จะได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.11 จะได้ว่าถ้า $\{S_n\}$ มีขอบเขตบน แล้ว $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

และโดยบทแทรก 3.2.12 จะได้ว่าถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขตบน แล้ว $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกสู่บวกอนันต์ ●

ทฤษฎีบท 4.1.14 : การเพิ่มเทอมจำนวนจำกัดเทอมให้กับอนุกรมไม่มีผลต่อการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรม

พิสูจน์ : ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum x_n$

ประการแรกเราจะแสดงว่า ถ้าเพิ่มเทอม 1 เทอม ที่มีค่าเท่ากับ t ระหว่างเทอมที่ k กับ $k+1$ ของอนุกรม $\sum x_n$ แล้วอนุกรมที่ได้ใหม่จะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum x_n$ ลู่เข้า

ให้ $\{S'_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมใหม่

ดังนั้นเราจะแสดงว่า $\{S'_n\}$ เป็นลำดับโคชี ก็ต่อเมื่อ $\{S_n\}$ เป็นลำดับโคชี

ให้ $\{S'_n\}$ เป็นลำดับโคชี และให้ $\varepsilon > 0$

ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก $N > k+1$ ซึ่ง ถ้า $m > n > N$ แล้ว

$$|S'_m - S'_n| < \varepsilon$$

พิจารณา

$$S'_{n+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + t + x_{k+1} + \ldots + x_n$$
$$S'_{m+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + t + x_{k+1} + \ldots + x_m$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}|S'_{m+1} - S'_{n+1}| &= |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m| \\ &= |S_m - S_n| < \varepsilon\end{aligned}$$

ซึ่งสรุปได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับโคชี

ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับโคชี ให้ $\varepsilon > 0$

ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก $N' > k+1$ ซึ่ง ถ้า $m > n > N'$ แล้ว

$$|S_m - S_n| = |x_{n+1} + \ldots + x_m| < \varepsilon$$

เลือก $N = N' + 1$ สำหรับ $m > n > N$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}|S'_m - S'_n| &= |x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{m-1}| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

ซึ่งสรุปได้ว่า $\{S'_n\}$ เป็นลำดับโคชี

ประการสุดท้ายถ้าเพิ่มเทอม p เทอม ให้กับอนุกรม $\sum x_n$ ซึ่งลู่เข้าหรือลู่ออก อนุกรมที่ได้ใหม่ยังคงลู่เข้าหรือลู่ออกเช่นกัน โดยใช้ข้อสรุปในประการแรก ●

ทฤษฎีบท 4.1.15 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\sum(x_{n+1}-x_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\lim x_n = x$ และ
ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum(x_{n+1}-x_n)$
สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ เราได้ว่า

$$S_1 = x_2 - x_1$$
$$S_2 = (x_2-x_1)+(x_3-x_2) = x_3 - x_1$$
$$S_3 = (x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3) = x_4 - x_1$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$S_n = x_{n+1} - x_1$$

เนื่องจาก $\lim x_{n+1} = \lim x_n = x$ และ $\lim x_1 = x_1$
ดังนั้น $\lim S_n = \lim(x_{n+1}-x_1) = \lim x_{n+1} - \lim x_1 = x - x_1$
เพราะฉะนั้น $\sum(x_{n+1}-x_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 4.1.16 : ถ้า $\sum(x_{n+1}-x_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum(x_{n+1}-x_n)$ และ
ให้ $\sum(x_{n+1}-x_n) = S$
สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ เราได้ว่า

$$S_{n-1} = x_n - x_1$$

เนื่องจาก

$$\lim S_{n-1} = \lim S_n = S$$

ดังนั้น $\lim x_n = \lim(S_{n-1}-x_1) = \lim S_{n-1} - \lim x_1 = S - x_1$
เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

จากทฤษฎีบท 4.1.15 และทฤษฎีบท 4.1.16 เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.17 : $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum(x_{n+1}-x_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 4.1.18 : จงพิจารณาว่า $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

พิสูจน์ : สำหรับแต่ละ $n \in I^{+}$ ให้ $x_n = \sqrt{n}$
จะได้ว่า

$\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.17 สรุปได้ว่า $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ ลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.1.19 : จงพิจารณาว่า $\sum\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
พิจารณา

$$x_{n+1}-x_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n} = \sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

เนื่องจาก $\lim x_n = 0$
โดยทฤษฎีบท 4.1.17 จะได้ว่า $\sum\left(x_{n+1}-x_n\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

4.2 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (Tests for Convergence of Series)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่เทอมไม่เป็นลบ ซึ่งได้แก่ การทดสอบเปรียบเทียบ การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบโดยใช้อินทิกรัล และการทดสอบอนุกรมพี พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.1 : การทดสอบเปรียบเทียบ (Comparison test)

ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมไม่เป็นลบ ซึ่ง $a_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in I^{+}$

(1) ถ้า $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : (1) ให้ $\{S_n\}$ และ $\{T_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ ตามลำดับ ซึ่ง $a_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in I^{+}$

และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก M ที่ทำให้

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n \le M \qquad \text{สำหรับทุก } n \in I^+$$

และ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \le b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = T_n \qquad \text{สำหรับทุก } n \in I^+$$

ถ้า $\{T_n\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว ในทฤษฎีบท 3.2.11 สรุปได้ว่า $T_n \le L$ สำหรับทุก $n \in I^+$
ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและเป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.11 สรุปได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
สมมติให้ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
โดย (1) จะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง
ดังนั้น $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.2.2 : จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - 2n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

พิสูจน์ : เนื่องจาก $\frac{n}{3n^2 - 2n} = \frac{n}{n(3n-2)} = \frac{1}{3n-2} \ge \frac{1}{3n}$ สำหรับทุก $n \in I^+$

สมมติ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ ลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ ลู่ออก เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2.1 (2) สรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - 2n} \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก} \qquad ●$$

ตัวอย่าง 4.2.3: จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n^2)}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

พิสูจน์ : สำหรับแต่ละ n จะได้ว่า

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

และดังนั้นสำหรับแต่ละ n จะได้ว่า

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\left(n^2\right)}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}>2^n$$

และ $\sum\frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

บทแทรก 4.2.4 : ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรม ซึ่งมีจำนวนเต็มบวก N_1 ที่สอดคล้องว่า $0\le a_n\le b_n$ สำหรับทุก $n>N_1$

(1) ถ้า $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : (1) ให้ $\varepsilon>0$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N_2 ที่ทำให้

$$b_{n+1}+b_{n+2}+b_{n+3}+\ldots+b_m<\varepsilon \quad \text{สำหรับ } m,n>N_2 \text{ และ } m>n$$

ให้ $N=\max\{N_1,N_2\}$ สำหรับ $m,n>N$ และ $m>n$ จะได้ว่า

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots+a_m\le b_{n+1}+b_{n+2}+b_{n+3}+\ldots+b_m<\varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 4.1.11 จะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สมมติให้ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดย (1) จะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

บทแทรก 4.2.5 : ให้ $\sum a_k$ เป็นอนุกรม เมื่อ

$$a_k=\frac{k^n+b_{n-1}k^{n-1}+\ldots+b_0}{k^m+c_{m-1}k^{m-1}+\ldots+c_o}$$

แล้ว $\sum a_k$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum\left(\frac{k^n}{k^m}\right)$ ลู่เข้า

พิสูจน์ : เนื่องจาก

$$k^n + b_{n-1}k^{n-1} + \ldots + b_0 = k^n\left(1 + \frac{b_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{b_0}{k^n}\right) \quad \text{สำหรับ } k \text{ ที่มีค่ามากพอ}$$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{b_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{b_0}{k^n} < \frac{3}{2}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{2}k^n < k^n + b_{n-1}k^{n-1} + \ldots + b_0 < \frac{3}{2}k^n$$

และในทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$\frac{1}{2}k^m < k^m + c_{m-1}k^{m-1} + \ldots + c_0 < \frac{3}{2}k^m \qquad \text{สำหรับ } k \text{ ที่มีค่ามากพอ}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\frac{\frac{1}{2}k^n}{\frac{3}{2}k^m} < a_k < \frac{\frac{3}{2}k^n}{\frac{1}{2}k^m} \quad \text{สำหรับ } k \text{ ที่มีค่ามากพอ}$$

ดังนั้น $\sum a_n$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum\left(\frac{k^n}{k^m}\right)$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 4.2.6 : การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit Comparision test)

ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก และ $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ จะเป็นอนุกรมชนิดเดียวกัน (ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน)

พิสูจน์ : เนื่องจาก $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$ ดังนั้นมี N ซึ่งทำให้

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2} \qquad \text{เมื่อ } n > N$$

หรือ

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2}$$

ทำให้

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \quad \text{ทุก } n > N$$

และ

$$a_n > \frac{L}{2} b_n \quad , \quad b_n > \frac{2}{3L} a_n \quad \text{ทุก } n > N$$

โดยทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกด้วยกัน ●

ข้อสังเกต 4.2.7 : ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก และ $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$

(1) ถ้า $L = 0$ แล้ว $\sum a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $L = +\infty$ แล้ว $\sum a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : (1) เนื่องจาก $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \quad \text{ทุก } n > N$$

เพราะฉะนั้น $a_n < b_n$ เมื่อ $n > N$ และดังนั้น $\sum a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย
ถ้า $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ให้ $M > 0$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\frac{a_n}{b_n} > M$$

เพราะฉะนั้น $a_n > Mb_n$

เนื่องจาก $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนั้น $\sum Mb_n$ ลู่ออก

โดยทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า $\sum a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.2.8 : ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่มีเทอมเป็นบวกแล้ว $\sum {a_n}^2$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 4.1.9 จะได้ว่า $\lim a_n = 0$

เพราะฉะนั้น โดยข้อสังเกต 4.2.7(1) สรุปได้ว่า $\sum {a_n}^2$ ลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 4.2.9 : ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่มีเทอมเป็นบวก แล้ว $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ : เนื่องจาก $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.1.5 เราสรุปได้ว่า $\sum\left(\sqrt{a_n^2}+\sqrt{b_n^2}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
พิจารณา

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} \le \sqrt{a_n^2}+\sqrt{b_n^2}$$

เพราะฉะนั้นโดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบจะได้ว่า $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 4.2.10 : ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่มีเทอมเป็นบวก แล้ว $\sum\dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
โดยทฤษฎีบท 4.1.9 จะได้ว่า $\lim a_n = 0$
พิจารณา

ให้ $a_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$ และ $b_n = a_n$

จะได้ว่า

$$\lim\frac{a_n}{b_n} = \lim\frac{\dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}}{a_n} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+a_n}}$$

เนื่องจาก $\lim a_n = 0$
ดังนั้น $\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}} = 1$
เพราะฉะนั้นโดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต สรุปได้ว่า $\sum\dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 4.2.11 : จงตรวจสอบอนุกรม $\sum\dfrac{n+5}{3n(n+\sqrt{n})}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $a_n = \dfrac{n+5}{3n(n+\sqrt{n})} = \dfrac{1+\dfrac{5}{n}}{3n\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ และ $b_n = \dfrac{1}{n}$

ดังนั้น

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1+\frac{5}{n}}{3\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

ทำให้

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3}$$

เนื่องจาก $\sum \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้นโดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต จะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 4.2.12 : จงตรวจสอบอนุกรม $\sum \frac{3n+2}{(2n+1)5^n}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $a_n = \frac{3n+2}{(2n+1)5^n} = \frac{3+\frac{2}{n}}{5^n\left(2+\frac{1}{n}\right)}$ และ $b_n = \frac{1}{5^n}$

ดังนั้น

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

ทำให้

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2}$$

เนื่องจาก $\sum \frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต จะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 4.2.13 : จงตรวจสอบอนุกรม $\sum \frac{2n+1}{ne^n}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $a_n = \frac{2n+1}{ne^n}$ และ $b_n = \frac{1}{e^n}$

ดังนั้น

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2n+1}{n} = 2$$

เนื่องจาก $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้นโดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต จะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 4.2.14 : การทดสอบอัตราส่วน (Ratio test)

กำหนดให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก และให้ $R = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $r = \liminf \frac{x_{n+1}}{x_n}$

(1) ถ้า $R < 1$ แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(ถ้า $r \le 1 \le R$ แล้วไม่มีข้อสรุป)

พิสูจน์ : (1) ให้ $R = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$ และ $R < 1$

ให้ $\varepsilon = \frac{(1-R)}{2}$ และ $R_1 = R + \varepsilon$

ดังนั้น
$$R_1 = R + \frac{(1-R)}{2} = \frac{R}{2} + \frac{1}{2} < 1$$

เพราะฉะนั้น $R_1 < 1$ และโดยทฤษฎีบท 3.4.13 (1) จะได้ว่า

$\frac{x_{n+1}}{x_n} < R_1$ สำหรับทุกเทอมยกเว้นจำนวนจำกัดเทอม

ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$x_{n+1} < x_n R_1$$

นั่นคือ

$$x_N + x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots < x_N + x_N R_1 + x_N (R_1^2) + \ldots$$

พิจารณา

$x_N + x_N R_1 + x_N (R_1^2) + x_N (R_1^3) + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2.1 (1) จะได้ว่า

$x_N + x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) จะแสดงว่า $r=\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ซึ่ง ถ้า $r>1$ แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สมมติให้ $r>1$ โดยทฤษฎีบท 3.4.13 (2) จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon>0$ มีจำนวนเทอมจำกัด ซึ่ง

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<r-\varepsilon$$

เลือก $\varepsilon=\frac{r-1}{2}$ และ $r_1=r-\varepsilon$ ซึ่ง $r_1>1$

ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n>N$ แล้ว

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>r_1$$

ซึ่งทำให้

$$x_{N+k}>x_N(r_1^k)>x_N \quad \text{และ} \quad \lim x_n \neq 0$$ ●

ตัวอย่าง 4.2.15 : จงตรวจสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n=\frac{3^n}{n!}$

ดังนั้น $$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\lim\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!\frac{3^n}{n!}}\right)=\lim\frac{3}{n+1}=0$$

โดยการทดสอบอัตราส่วน จะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 4.2.16 : จงตรวจสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+2)!}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n=\frac{n^n}{(n+2)!}$

ดังนั้น $$\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+3)!\frac{n^n}{(n+2)!}}$$

$$= \lim\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n+3}\right]$$

$$= \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\frac{n+1}{n+3}$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

$$= e \cdot 1 = e > 1$$

โดยการทดสอบอัตราส่วน สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+2)!}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.2.17 : จงพิจารณาว่า $\sum\frac{n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{n}{2^n}$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right) \div \left(\frac{n}{2^n}\right) = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{2}$$

นั่นคือ

$$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim\left(\frac{n+1}{n}\right) \times \lim\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

โดยการทดสอบอัตราส่วนจะได้ว่า $\sum\frac{n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 4.2.18 : การทดสอบราก (Root test)

ให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมที่เทอมไม่เป็นลบ และให้ $\rho = \lim\sup(x_n)^{1/n}$

(1) ถ้า $\rho < 1$ แล้ว $\sum x_n$ ลู่เข้า

(2) ถ้า $\rho > 1$ แล้ว $\sum x_n$ ลู่ออก

(ถ้า $\rho = 1$ แล้วไม่มีข้อสรุป)

พิสูจน์ : (1) ให้ $\rho = \limsup (x_n)^{1/n} < 1$

เลือก $\varepsilon = \dfrac{1-\rho}{2}$ และให้ $\rho_1 = \rho + \varepsilon$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho + \left(\frac{1-\rho}{2}\right) \\ &= \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\rho_1 < 1$

โดยทฤษฎีบท 3.4.13 จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ มีเทอม x_n จำนวนจำกัด ซึ่ง

$$(x_n)^{1/n} > \rho + \varepsilon$$

ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n \geq N$ แล้ว

$$(x_n)^{1/n} \leq \rho_1 \quad \text{หรือ} \quad x_n \leq \rho_1^n$$

นั่นคือ

$$x_N + x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots \leq (\rho_1)^N + (\rho_1)^{N+1} + (\rho_1)^{N+2} + \ldots$$

พิจารณา

$(\rho_1)^N + (\rho_1)^{N+1} + (\rho_1)^{N+2} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.1 (1) จะได้ว่า

$x_N + x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และโดยทฤษฎีบท 4.1.14 สรุปได้ว่า $\sum x_n$ ลู่เข้า

(2) จะแสดงว่า $\rho = \limsup (x_n)^{1/n}$ ซึ่ง $\rho > 1$ แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สมมติให้ $\rho = \limsup (x_n)^{1/n} > 1$

เลือก $\varepsilon = \dfrac{\rho - 1}{2}$

โดยทฤษฎีบท 3.4.13 จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$

มีเทอม x_n จำนวนอนันต์เทอมของอนุกรม $\sum x_n$ ซึ่ง $(x_n)^{1/n} > \rho - \varepsilon$

ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก N จะมี $n > N$ ซึ่ง

$$(x_n)^{1/n} > \rho - \varepsilon$$

หรือ

$$x_n > (\rho - \varepsilon)^n > 1$$

ดังนั้น $\lim x_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.2.19 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{e^n}{n^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{e^n}{n^n} = \left(\frac{e}{n}\right)^n$

จะได้ว่า $\lim (x_n)^{1/n} = \lim \left(\left(\frac{e}{n}\right)^n\right)^{1/n}$

$$= \lim \left(\frac{e}{n}\right)$$

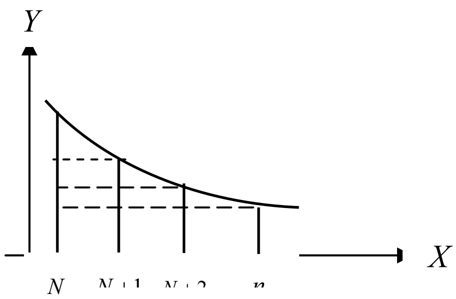
$$= 0$$

ดังนั้น $\sum \frac{e^n}{n^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.2.20 : การทดสอบโดยใช้อินทิกรัล (Integral test)

ให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกเทอมเป็นจำนวนบวก และ $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้น และต่อเนื่องบน $[N,\infty)$ ซึ่ง $f(n) = x_n$ (ดูรูป 4.2.1) แล้ว $\sum x_n$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\int_N^\infty f(x)\, dx$ ลู่เข้า

พิสูจน์ :



รูป 4.2.1

พิจารณารูปข้างบนจะเห็นว่าทุก $n \geq N$ เราได้

$$S_n - S_N = x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n \leq \int_N^n f(x)\; dx$$

นิยาม g บน $[N,\infty)$ ดังนี้

$$g(x) = \int_N^x f(x)\ dx$$

เห็นได้ว่า g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าไม่ลดลง

กำหนดให้ $\int_N^\infty f(x)\ dx$ ลู่เข้า ดังนั้นทุก $x \in [N, \infty)$ จะได้

$$g(x) \le \int_N^\infty f(x)\ dx = P$$

ดังนั้น $S_n \le S_N + P$ ทุก $n \ge N$

นั่นคือ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

เนื่องจาก $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่ลดลง เมื่อ $n \ge N$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.11 ได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และทำให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

กำหนดให้ $\int_N^\infty f(x)\ dx$ ลู่ออก

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \int_N^x f(x)\ dx$ ไม่มี

ให้ $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนจริง $M > N$ (สามารถเลือก M เป็นจำนวนเต็มบวก)

ซึ่งทำให้ $\int_N^M f(x)\ dx > \varepsilon$ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าไม่ลดลง

ดังนั้น

$$x_N + x_{N+1} + \ldots + x_{M-1} \ge \int_N^M f(x)\ dx > \varepsilon$$

นั่นคือ $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขต แต่ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่ลดลง เมื่อ $n \ge N$

เพราะฉะนั้น $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.2.21 : จงแสดงว่า $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ เมื่อ $x \ge 3$

เราจะใช้การทดสอบโดยใช้อินทิกรัลตรวจสอบอนุกรม

เนื่องจาก

$$\int_3^n f(x)\ dx = \int_3^n \frac{1}{x\ln x}\ dx$$
$$= \ln|\ln x|\Big|_3^n$$
$$= \ln|\ln n| - \ln|\ln 3|$$

ดังนั้น $\int_3^n f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\left[\ln|\ln n| - \ln|\ln 3|\right] = +\infty$

และสรุปได้ว่า $\int_3^\infty f(x)\ dx$ ลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.2.22 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{n}{e^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $f(x) = xe^{-x^2}$ เมื่อ $x \geq 1$

เนื่องจาก

$$\int_1^n xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_1^n e^{-x^2}d(-x^2)$$
$$= -e^{-x^2}\ \Big|_1^n$$
$$= -e^{-n^2} + e$$

เพราะฉะนั้น $\lim \int_1^n f(x)\ dx = e$ และโดยการทดสอบโดยใช้อินทิกรัล

สรุปได้ว่า $\sum \frac{n}{e^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.2.23 : จงแสดงว่าอนุกรมพี ($p-$series) , $\sum \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $p > 1$ และลู่ออกถ้า $p \leq 1$

พิสูจน์ : ให้ $p = 1$ จะได้ว่า

$$\int_1^n \frac{1}{x}\ dx = \ln\ x\Big|_1^n = \ln\ n$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x}\ dx = \infty$$

เพราะฉะนั้น $\sum \frac{1}{n}$ ลู่ออก

ให้ $p \neq 1$ จะได้ว่า

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p}\right)$$

ถ้า $p < 1$ แล้ว $1 - p = \varepsilon > 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\varepsilon} = \infty$ และ $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก

ถ้า $p > 1$ แล้ว $1 - p = -\varepsilon < 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\varepsilon} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p}\right]$ หาค่าได้ และ $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่เข้า

4.3 การลู่เข้าสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (Absolute and Conditional Convergene)

บทนิยาม 4.3.1 : เรากล่าวว่าอนุกรม $\sum x_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolutely convergent)** ถ้า $\sum |x_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เราจะกล่าวว่า $\sum x_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (conditionally convergent)** ถ้า $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่ $\sum |x_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 4.3.2 : จงตรวจสอบอนุกรม $\sum \frac{\sin n}{n^3}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{\sin n}{n^3}$

ดังนั้น $|x_n| = \left|\frac{\sin n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$

แต่ $\sum \frac{1}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า $\sum |x_n|$ ลู่เข้า

นั่นคือ $\sum \frac{\sin n}{n^3}$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ ●

ทฤษฎีบท 4.3.3 : ถ้า $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum x_n$ และ
ให้ $\{T_n\}$ เป็นลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum |x_n|$
ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\{T_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $m > n > N$ แล้ว

$$|T_m - T_n| < \varepsilon$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m| \\ &\le |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| \\ &= |T_m - T_n| \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $m > n > N$ แล้ว

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

นั่นคือ $\{S_n\}$ เป็นลำดับโคชี
เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
ดังนั้น $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ทฤษฎีบท 4.3.4 : กำหนดอนุกรม $\sum x_n$ ซึ่งมีเทอมไม่เป็นศูนย์

ให้ $R = \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ และ $r = \liminf \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$

(1) ถ้า $R < 1$ แล้ว $\sum x_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์

(2) ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum x_n$ ลู่ออก

พิสูจน์ : แทน x_n ในทฤษฎีบท 4.2.14 ด้วย $|x_n|$ ●

ตัวอย่าง 4.3.5 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{2^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{2^n}{n!}$ ดังนั้น $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right| \\ &= \lim\frac{2}{n+1} \\ &= 0<1\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\sum\left|\frac{2^n}{n!}\right|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum\frac{2^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ ●

ตัวอย่าง 4.3.6 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum\frac{2^n}{n(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{2^n}{n(n+2)}$ ดังนั้น $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{n(n+2)}{2^n}\right| \\ &= \lim\left|\frac{2n(n+1)}{(n+1)(n+3)}\right| \\ &= \lim\frac{2n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} \\ &= 2>1\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sum\frac{2^n}{n(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.3.7 : กำหนดอนุกรม $\sum x_n$ และให้

$$\rho = \limsup\left(|x_n|\right)^{1/n}$$

(1) ถ้า $\rho<1$ แล้ว $\sum x_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์

(2) ถ้า $\rho > 1$ แล้ว $\sum x_n$ ลู่ออก

พิสูจน์ : แทน $(x_n)^{1/n}$ ในทฤษฎีบท 4.2.18 ด้วย $(|x_n|)^{1/n}$ ●

ตัวอย่าง 4.3.8 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n$ พิจารณา $(|x_n|)^{\frac{1}{n}} = \left(\left|\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{3n+2}{2n-1}$

จะได้ว่า

$$\lim(|x_n|)^{\frac{1}{n}} = \lim\frac{3n+2}{2n-1} = \frac{3}{2} > 1$$

ดังนั้น $\sum\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.3.9 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum n^{100}e^{-n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $x_n = n^{100}e^{-n}$ พิจารณา $(|x_n|)^{\frac{1}{n}} = \left(\left|n^{100}e^{-n}\right|\right)^{\frac{1}{n}}$

จะได้ว่า

$$\lim(|x_n|)^{\frac{1}{n}} = \lim\left(\left|n^{100}e^{-n}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\frac{(n)^{\frac{100}{n}}}{e}$$

โดยตัวอย่าง 3.2.9 จะได้ว่า

$$\lim\frac{(n)^{\frac{100}{n}}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.7 (1) สรุปได้ว่า $\sum n^{100}e^{-n}$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ ●

บทนิยาม 4.3.10 : เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum(-1)^n x_n$ และ $\sum(-1)^{n+1}x_n$ เป็น**อนุกรมสลับ** **(alternating series)** ถ้า $x_n > 0$ สำหรับทุก n

ตัวอย่าง 4.3.11 : ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของอนุกรมสลับ

1) $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

2) $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

3) $\sum (-1)^{n}\frac{1}{n!} = -\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots$ ●

ทฤษฎีบท 4.3.12 : การทดสอบอนุกรมสลับ (Alternating Series Test)

ให้ $\sum\left(-1\right)^{n+1}x_n$ เป็นอนุกรมสลับ ซึ่ง

(1) $x_n \ge x_{n+1} > 0$ สำหรับทุก n

(2) $\lim x_n = 0$

แล้ว $\sum\left(-1\right)^{n+1}x_n$ และ $\sum\left(-1\right)^{n}x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ : จะแสดงว่าอนุกรม $\sum(-1)^{n+1}x_n$ ลู่เข้า

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ให้ $S_n = x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^{n+1}x_n$

เนื่องจาก $x_n - x_{n+1} \ge 0$ จะได้ว่า

$$S_{2n} = \left(x_1 - x_2\right) + \left(x_3 - x_4\right) + \ldots + \left(x_{2n-1} - x_{2n}\right) \ge 0$$

ทำให้ $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ

และเพราะว่า

$$S_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - \ldots - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n} \le x_1$$

นั่นคือ $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นที่มีขอบเขต ทำให้ $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ดังนั้นมี $S \in R$ ซึ่ง $\lim S_{2n} = S$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim S_{2n} = S$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก n_1 ซึ่ง

$$\left|S_{2n} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \ge n_1$$

และเนื่องจาก $\lim x_n = 0$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก n_2 ซึ่ง

$$\left|x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \ge n_1$$

ให้ $N = \max\{2n_1 + 1, 2n_2\}$ และ $n > N$

กรณีที่ 1 : $n = 2k$ จะได้ว่า $k \ge n_1$ ดังนั้น $\left|S_n - S\right| = \left|S_{2k} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

กรณีที่ 2 : $n = 2k+1$ จะได้ว่า $k \ge n_1$ และ $2k+1 \ge n_2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}|S_n - S| &= |S_{2k+1} - S| \\ &= |S_{2k} - S| + |x_{2k+1}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim S_n = S$

นั่นคือ $\sum(-1)^{n+1}x_n$ ลู่เข้า

และเนื่องจาก $\sum(-1)^n x_n = \sum(-1)(-1)^{n+1} x_n$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.5 สรุปได้ว่า $\sum(-1)^n x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ●

ข้อสังเกต 4.3.13 :

(1) เห็นได้ชัดว่าอนุกรม $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมฮาร์โมนิกสลับ**

(2) ทฤษฎีบท 4.3.12 จะยังคงเป็นจริง ถึงแม้ว่าเงื่อนไขที่ $0 < x_{n+1} \le x_n$ ทุก n จะเปลี่ยนเป็น $0 < x_{n+1} \le x_n$ ทุก $n \ge N$ สำหรับบางค่าของ N

ตัวอย่าง 4.3.14 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum\frac{(-n)^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขหรือลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{(-n)^n}{n!}$

พิจารณา $\sum\left|\frac{(-n)^n}{n!}\right| = \sum\frac{n^n}{n!}$

โดยการทดสอบอัตราส่วนจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\rho &= \lim\frac{x_{n+1}}{x_n} \\ &= \lim\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} \\ &= \lim\frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= e > 1$$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 4.3.4 สรุปได้ว่า $\sum \frac{(-n)^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ตัวอย่าง 4.3.15 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{n!}{(-n)^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขหรือลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{n!}{(-n)^n}$

พิจารณา $\sum \left|\frac{n!}{(-n)^n}\right| = \sum \frac{n!}{n^n}$

โดยการทดสอบอัตราส่วนจะได้ว่า

$$\rho = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$$
$$= \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!}$$
$$= \lim \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$= 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 4.3.4 สรุปได้ว่า $\sum \frac{n!}{(-n)^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ ●

ตัวอย่าง 4.3.16 : จงตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขหรือลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

พิจารณา

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\ln n}\right| = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

โดยตัวอย่างที่ 4.2.21 ได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ ลู่ออก

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์

เราจะตรวจสอบว่า $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ โดยใช้การทดสอบอนุกรมสลับ

สำหรับ $n \geq 3$ ให้

$$x_n = \frac{1}{n\ln n}$$

ดังนั้น

$$0 < x_n \leq x_{n+1}$$

และ $\lim x_n = 0$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

นั่นคือ $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ●

4.4 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยแบบอื่น (Others Test for Convergence)

ทฤษฎีบท 4.4.1 : การทดสอบของคุมเมอร์ (Kummer's test)

กำหนดให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก ให้ $\{P_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนบวก ซึ่งทำให้ $\{b_n\}$ ถูกนิยาม สำหรับทุก n ดังนี้

$$b_n = P_n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) - P_{n+1}$$

ถ้า $\{b_n\}$ มีลิมิตเป็น L (L อาจเป็นค่าอนันต์) แล้วได้ว่า

(1) $\sum x_n$ ลู่เข้า ถ้า $L > 0$

(2) $\sum x_n$ ลู่ออก ถ้า $L \leq 0$ และ $\sum \dfrac{1}{P_n}$ ลู่ออก

พิสูจน์ : (1) ให้ $\alpha \in (0, L)$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้ $b_n > \alpha$ ทุก $n \geq N$ พิจารณา $m > 1$ จะได้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$P_N x_N - P_{N+1} x_{N+1} > \alpha x_{N+1}$$
$$P_{N+1} x_{N+1} - P_{N+2} x_{N+2} > \alpha x_{N+2}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$P_{N+m-1} x_{N+m-1} - P_{N+m} x_{N+m} > \alpha x_{N+m}$$

บวกอสมการทั้งหมดข้างบนจะได้

$$P_N x_N - P_{N+m} x_{N+m} > \alpha\left(x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots + x_{N+m}\right) = \alpha\left(S_{N+m} - S_N\right)$$

เมื่อ $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เพราะฉะนั้น

$$\alpha S_{N+m} < P_N x_N - P_{N+m} x_{N+m} + \alpha S_N$$

เนื่องจาก $P_{N+m} x_{N+m} > 0$ ดังนั้น

$$P_N x_N - P_{N+m} x_{N+m} + \alpha S_N < \alpha S_N + P_N x_N$$

ทำให้ $S_{N+m} < S_N + \dfrac{P_N x_N}{\alpha}$

นั่นคือ ถ้า $n > N$ แล้ว $S_n < S_N + \dfrac{P_N x_N}{\alpha}$

ให้ $M = \max\left\{S_1, S_2, \ldots, S_N, S_N + \dfrac{P_N x_N}{\alpha}\right\}$

เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต แต่ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่เพิ่มขึ้น

ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และเพราะฉะนั้น $\sum x_n$ ลู่เข้า

(2) เนื่องจาก $L \leq 0$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n \geq N$ แล้วจะได้ว่า

$$P_n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) - P_{n+1} \leq 0$$

นั่นคือทุก $n \geq N$ จะได้

$$P_N x_N \leq P_{N+1} x_{N+1} \leq \ldots \leq P_n x_n \leq \ldots$$

หรือทุก $n \geq N$ ได้ว่า

$$x_n \geq \frac{P_N x_N}{P_n}$$

แต่ $\sum \dfrac{1}{P_n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนั้น $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกด้วย ●

ตัวอย่าง 4.4.2 : จงตรวจสอบ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ ... \ \cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ ... \ \cdot(2n+1)}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $x_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ ... \ \cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ ... \ \cdot(2n+1)}$

ถ้าใช้การทดสอบอัตราส่วนจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

ซึ่งให้ผลสรุปไม่ได้ว่าอนุกรมที่จะทดสอบเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ดังนั้นจึงใช้การทดสอบของคุมเมอร์

ถ้าให้ $P_n = \frac{1}{2n+3}$ แล้วทุก n จะได้ว่า

$$b_n = P_n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) - P_{n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+5} = \frac{3}{(2n+5)(2n+2)}$$

และ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ เนื่องจาก $\sum \frac{1}{P_n} = \sum (2n+3)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 4.4.3 : การทดสอบของราเบ (Raabe's test)

กำหนดให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก และให้ $c_n = n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$

ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $L = \lim c_n$ แล้วได้ว่า

(1) $\sum x_n$ ลู่เข้า ถ้า $L > 1$ หรือ $L = \infty$

(2) $\sum x_n$ ลู่ออก ถ้า $L < 1$ หรือ $L = -\infty$

พิสูจน์ : โดยใช้การทดสอบของคุมเมอร์กับ $\{P_n\} = \{n\}$ ●

ในกรณีที่ได้ค่า $L = 1$ ในการทดสอบของราเบ เราจะใช้การทดสอบทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4.4 : กำหนดให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก

ให้ $d_n = \ln n\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$

ถ้า $\lim d_n = L$ จะได้ว่า

(1) $\sum x_n$ ลู่เข้า ถ้า $1 < L \le \infty$

(2) $\sum x_n$ ลู่ออก ถ้า $-\infty \le L < 1$

พิสูจน์ : ใช้การทดสอบคุมเมอร์กับ $\{P_n\} = n \ln n$ ●

ตัวอย่าง 4.4.5 : กำหนดให้ α, β, γ เป็นจำนวนเต็มบวก นิยามอนุกรมไฮเพอร์ยีออเมตริกว่าคือ อนุกรม

$$1+\frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}+\ldots$$

ถ้าใช้การทดสอบอัตราส่วนจะได้ว่า

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+1)n+\gamma} = 1$$

ซึ่งให้ข้อสรุปไม่ได้ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก แต่ถ้าใช้การทดสอบของราเบได้ว่า

$$c_n = n\left[\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}-1\right] = \frac{\left[(\gamma+1)-(\alpha+\beta)\right]n^2+(\gamma-\alpha\beta)n}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$$

และ $\lim c_n = (\gamma+1)-(\alpha+\beta)$

ถ้า $\gamma-(\alpha+\beta) > 0$ ได้ว่าอนุกรมลู่เข้า

และถ้า $\gamma-(\alpha+\beta) < 0$ ได้ว่าอนุกรมลู่ออก ●

ผลของทฤษฎีบท 4.4.1 และทฤษฎีบท 4.4.4 ทำให้ได้การทดสอบของเกาส์

ทฤษฎีบท 4.4.6 : การทดสอบของเกาส์ (Gauss's test)

กำหนดให้ $\sum x_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก

ให้ r เป็นค่าคงตัว

ถ้า $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตซึ่งสอดคล้องว่า

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = 1+\frac{r}{n}+\frac{b_n}{n^2}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้วได้ว่า

(1) $\sum x_n$ ลู่เข้า ถ้า $r > 1$

(2) $\sum x_n$ ลู่ออก ถ้า $r \le 1$

ตัวอย่าง 4.4.7 : จงตรวจสอบอนุกรม

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \dots\ \cdot(2n)}+\dots$$

ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

พิสูจน์ : ให้ $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \dots\ \cdot(2n)}$

ถ้าใช้การทดสอบอัตราส่วนจะได้

$$\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\frac{2n+1}{2n+2}=1$$

ซึ่งจะสรุปไม่ได้ ลองใช้การทดสอบของเกาส์ พิจารณา

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}=1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n(2n+1)}=1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2(2n+1)}\right)$$

ถ้าให้ $b_n=-\dfrac{n}{2(2n+1)}$

ดังนั้น $|b_n|\le\dfrac{1}{4}$ โดยการทดสอบของเกาส์อนุกรมที่กำหนดมาลู่ออก เนื่องจาก $r=\dfrac{1}{2}<1$ ●

4.5 ผลคูณของอนุกรม (Product of Series)

บทนิยาม 4.5.1 : ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรม **ผลคูณโคชี (Cauchy product)** ของอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ คือ อนุกรม $\sum c_n$ เมื่อ

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\dots+a_nb_0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.5.2 : จงหาผลคูณของอนุกรม

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

กับอนุกรม

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots$$

พิสูจน์ : พิจารณาการหาค่าของเทอมต่าง ๆ ดังนี้

$$1 = 1\times 1$$
$$\frac{3}{4} = \left(1\cdot\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)$$
$$\frac{5}{8} = \left(1\cdot\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot 1\right)$$
$$\frac{13}{24} = \left(1\cdot\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\cdot 1\right)$$
.
.
.

ดังนั้นผลคูณโคชีของอนุกรมที่กำหนดให้ คือ $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{13}{24}+\ldots$ ●

ตัวอย่าง 4.5.3 : ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรม นิยามโดย

$$a_n = b_n = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n = 0 \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & \text{ถ้า } n > 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่าผลคูณโคชีของอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $\sum c_n$ เป็นผลคูณโคชีของอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$
เราจะแสดงว่า $\lim c_n \neq 0$
เนื่องจาก

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
$$c_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$$
$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{nk-k^2}}$$

สำหรับ $n \geq 2$ เนื่องจาก $f(x) = nx - x^2$ มีค่าสูงสุดที่ $x = \frac{n}{2}$
ดังนั้น

$$nk-k^2 \le n\left(\frac{n}{2}\right)-\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}$$

และ

$$\frac{1}{\sqrt{nk-k^2}} \ge \frac{2}{n}$$

นั่นคือ

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{nk-k^2}} \ge (n-1)\left(\frac{n}{2}\right)=2-\frac{2}{n}$$

และ $\lim c_n \ne 0$ ●

เราจะขอจบการค้นคว้าอิสระนี้โดยการกล่าวถึงทฤษฎีบทของเมอร์เทน ซึ่งให้เงื่อนไขที่ผลคูณของอนุกรมจะลู่เข้า และจะขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.5.4 : ทฤษฎีบทของเมอร์เทน (Mertens's Theorem)

ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วผลคูณโคชีของอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้าสู่ $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$

พิสูจน์ : ดูการพิสูจน์ใน [5] หน้า 196 ●

ตัวอย่าง 4.5.5 : ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n=b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

จงแสดงว่าผลคูณโคชีของอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : ให้ $\sum c_n$ เป็นผลคูณโคชีของอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$

ดังนั้น

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}$$

เราจะแสดงว่า $\lim c_n \ne 0$ โดยการแสดงว่า

$c_{2r}>1$ ทุก $r \ge 1$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} c_{2r} &= \sum_{k=0}^{2r} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{2r-k-1}}{\sqrt{2r-k-1}} \\ &= (-1)^{2r} \sum_{k=0}^{2r} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{2r-k-1}} \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\left[2r-(k+1)\right]^2 \geq 0$$

หรือ

$$4r^2 - 4r(k+1) + (k+1)^2 \geq 0$$

ซึ่งทำให้

$$4r^2 \geq (k+1)\left[4r-(k+1)\right] \geq (k+1)\left[2r-(k+1)\right]$$

และจะได้

$$\frac{1}{4r^2} \leq \frac{1}{(k+1)(2r-k-1)}$$

หรือ

$$\frac{1}{2r} \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{2r-k-1}}$$

นั่นคือ

$$c_{2r} \geq (2r+1) \cdot \frac{1}{2r} > 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum c_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

บรรณานุกรม

[1] ดรรชนี กิจสมัคร **สารนิพนธ์เรื่องทฤษฎีของลำดับของจำนวนจริง** ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร 2549

[2] วารี เกรอต **แคลคูลัส** สำนักพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด 2539

[3] Belding, D.F. **Foundations of Analysis.** Prentice-Hall,Inc, 1991.

[4] Fridy, J.A. **The Theory of Calculus.** Harcourt Brace Jovanovich,Inc, 1987.

[5] Kirkwood, J.R. **An Introduction to Analysis.** 2nd ed. PWS Publishing Company, 1995.

[6] Lewin, J. **An Introduction to Mathematical Analysis.** 2nd ed. McGraw-Hill, 1993.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล นางสาวอังคณา ศรีเตชานุพงศ์

ที่อยู่ 54 หมู่ 6 ตำบลหนองปากโลง อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม 73000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2547 สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์จากสถาบันราชภัฏนครปฐม

พ.ศ. 2548 ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2547- ปัจจุบัน ครู ค.ศ. 1 โรงเรียนประถมฐานบินกำแพงแสน ตำบลกระตีบ อำเภอกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม