กราฟ *strongly* (*k*,*n*)-*extendable*

โดย

นายธรรมนูญ ผุยรอด

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2546

ISBN 974-464-445-1

ON STRONGLY (k,n)-EXTENDABLE

By

Thammanoon Puirod

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2003

ISBN 974-464-445-1

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้วิทยานิพนธ์เรื่อง "กราฟ *strongly (k,n)-extendable*" เสนอโดย นายธรรมนูญ ผุยรอด เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

……………………………………………..

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จิราวรรณ คงคล้าย)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่……..….เดือน………….พ.ศ………….

ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์

รองศาสตราจารย์ ดร. นวรัตน์ อนันต์ชื่น

คณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์

…………………………………ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

………….../…………../……………

…………………………………..กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. นวรัตน์ อนันต์ชื่น)

………….../…………../……………

…………………………………..กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ อนันต์ชื่น)

………….../…………../……………

K43511001 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คำสำคัญ : กราฟ *n-extendable* / กราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* / กราฟ k – *factor–critical*

ธรรมนูญ ผุยรอด : กราฟ *strongly* (k,n) – *extendable* (ON STRONGLY (k,n) – EXTENDABLE GRAPHS) อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ : รศ. ดร. นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 72 หน้า.

ISBN 974-464-445-1

ให้ n และ p เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $p \geq 2n+2$ และ G เป็นกราฟอันดับ p ที่มีการจับคู่สมบูรณ์ เราจะเรียก G ว่า**กราฟ** ***n-extendable*** ถ้าทุกๆ การจับคู่ขนาด n ในกราฟ G สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ และเรียก G ว่า**กราฟ** ***0-extendable*** ถ้า G มีการจับคู่สมบูรณ์ สำหรับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ n, k และ p ซึ่ง $p \geq 2n+k+2$ เราจะกล่าวว่ากราฟอันดับ p เป็น**กราฟ** ***strongly*** (k,n)***-extendable*** ถ้ากำจัดจุดจำนวน k จุดใด ๆ ในกราฟแล้วทำให้กราฟที่เหลือเป็นกราฟ *n-extendable* การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* กับกราฟ *n-extendable* และศึกษาคุณสมบัติของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด ในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์คี่ ในแง่ของค่า *toughness* ในแง่ของผลรวมของดีกรีของจุดในเซตของจุดที่เป็นอิสระ ในแง่ของการกำจัดเส้น 2 เส้นในกราฟ และในแง่ของการเพิ่มเส้น 2 เส้น เมื่อเส้นทั้ง 2 นั้นไม่ได้อยู่ในกราฟ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2546

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์..

K43511001 : MAJOR : MATHEMATICS
KEY WORD : *n*-EXTENDABLE GRAPHS / STRONGLY (*k*,*n*)-EXTENDABLE GRAPHS / *k*-FACTOR-CRITICAL GRAPHS

THAMMANOON PUIROD : ON STRONGLY(*k*,*n*)-EXTENDABLE GRAPHS. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF. NAWARAT ANANCHUEN, Ph.D. 72 pp.
ISBN 974-464-445-1

Let n and p be positive integers with $p \geq 2n + 2$ and let G be a graph on p vertices with a perfect matching. We say that G is n-extendable if for every matching M of size n in G, there is a perfect matching in G containing all of edges of M. A graph G is called 0-extendable if it has a perfect matching. Let n , k and p be non-negative integers with $p \geq 2n + k + 2$ and let G be a graph on p vertices with a perfect matching. G is strongly (k,n)-extendable if the deletion of any set of k vertices of G results in a graph which is n-extendable. In this thesis, we establish a relationship between strongly (k,n)-extendable graphs and n-extendable graphs. Further, we obtain properties of strongly (k,n)-extendable graphs in terms of minimum degree, number of odd components, toughness, degree sum of vertices in an independent set, a deletion of a pair of edges and an addition of a pair of edges which are not in a graph.

Department of Mathematics Graduate School , Silpakorn University Academic Year 2003

Student's signature……………………………………………..

Thesis Advisor's signature ……………………………………….

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ เพราะความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ ดร. นวรัตน์ อนันต์ชื่น ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ทำให้โลกทัศน์ทางวิชาการของผู้วิจัยกว้างขวางขึ้น ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่างๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี และขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ อนันต์ชื่น ผู้ที่ให้ความรู้ทางทฤษฎีกราฟ

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา และเป็นกำลังใจให้

ขอขอบคุณ เพื่อนๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับกำลังใจ น้ำใจ และความจริงใจที่มีให้กันเสมอมา

ขอกราบขอบพระคุณ คุณปู่ คุณย่า คุณพ่อ และคุณแม่ ที่มอบความรัก การดูแล การสนับสนุนการศึกษาจนทำให้ลูกมีความสำเร็จในวันนี้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย……………………………………………………………………………..ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ……………..…………………………………………………………...จ

กิตติกรรมประกาศ……………………………………………………………………………..ฉ

บทที่

1 ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีกราฟ……………………………………………………………...1

1.1 บทนำ……………………………………………………………………...1

1.2 บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง……...…………………………………...3

2 วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง…………………………………………………………………….12

2.1 ความเป็นมาและแนวคิดของกราฟ *strongly (k,n)-extendable*……………….. 12

2.2 ทฤษฎีบทจากงานวิจัยที่เกี่ยวกับกราฟ *strongly (k,n)-extendable*…………….. 22

3 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly (k,n)-extendable*……………………...23

3.1 เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly (k,n)-extendable*…………………………….23

3.2 เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *strongly (k,n)-extendable*…………..…………… 30

3.3 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly (k,n)-extendable*……………. 39

4 คุณสมบัติของกราฟ *strongly (k,n)-extendable*…………………………………………….47

4.1 คุณสมบัติของกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด…....47

4.2 ผลกระทบต่อกราฟ *strongly (k,n)-extendable* เมื่อเพิ่มเส้นหรือกำจัดเส้น……..60

5 ข้อเสนอแนะ……………………………………………………………………………. ..67

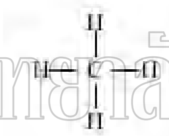
บรรณานุกรม………………………………………………………………………….…...68

ประวัติผู้วิจัย…………………………………………………………………………………..72

บทที่ 1
ความรู้พื้นฐานของทฤษฎีกราฟ

1.1 บทนำ

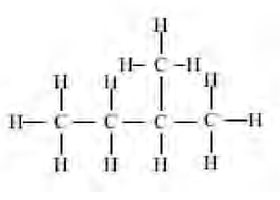
ทฤษฎีกราฟเป็นสาขาหนึ่งในคณิตศาสตร์ ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นได้มากมาย โดยที่เรานำกราฟไปใช้ในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของปัญหา เช่น ในทางวิทยาศาสตร์ นักเคมีได้นำกราฟมาสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโมเลกุลทางเคมีซึ่งประกอบไปด้วยอะตอมที่เชื่อมกันด้วยพันธะเคมี โดยใช้จุดแทนอะตอมและเส้นแทนพันธะเคมี เช่น



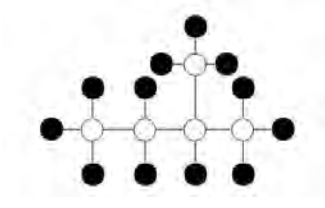
แทนด้วยกราฟ

รูปที่ 1 แสดงโมเลกุล ของมีเทน (CH_4)

รูปที่ 2 แสดงการนำกราฟมาสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโมเลกุลของมีเทน



แทนด้วยกราฟ



รูปที่ 3 แสดงโมเลกุล 2 – เมทิลบิวเทน

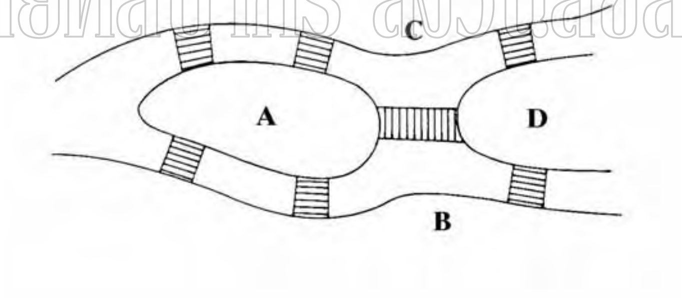
รูปที่ 4 แสดงการนำกราฟมาสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโมเลกุลของ 2– เมทิลบิวเทน

เราเรียกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโมเลกุลทางเคมีที่สร้างโดยใช้กราฟว่า “แผนภาพโครงสร้าง” แผนภาพโครงสร้างบอกให้เราทราบว่าอะตอมต่างๆเชื่อมต่อกันอย่างไร

ในทางคมนาคม ปัญหาที่พบคือ การเลือกเส้นทางในการขนส่ง เช่น การวางแผนในการเดินทางที่ต้องให้ผ่านทุกเส้นทางและเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดซึ่งผู้ที่ประสบปัญหานี้เช่น บุรุษไปรษณีย์ พนักงานจดมิเตอร์น้ำประปาและไฟฟ้า เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้สามารถนำกราฟไปใช้สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และสามารถแก้ปัญหาโดยนำความรู้ทางทฤษฎีกราฟมาใช้ โดยให้จุดแทนแยกของถนนและเส้นแทนถนน

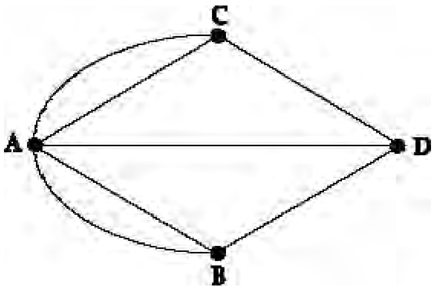
สำหรับข่ายงานการสื่อสารซึ่งประกอบไปด้วยศูนย์การสื่อสารและเครือข่ายงานการติดต่อระหว่างศูนย์ เราอาจใช้กราฟมาสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยให้จุดแทน ศูนย์การสื่อสาร และเส้น แทน เครือข่ายงานการติดต่อระหว่างศูนย์ เราสามารถนำความรู้ในทฤษฎีกราฟมาพิจารณาหาประสิทธิภาพของข่ายงานได้ เช่น พิจารณาประสิทธิภาพของข่ายงาน เมื่อมีศูนย์การสื่อสารหนึ่งใช้งานไม่ได้ แต่ข่ายงานนั้นยังคงใช้งานได้สำหรับศูนย์การสื่อสารที่เหลือ เป็นต้น

ปัญหาที่โด่งดังมีชื่อเสียงปัญหาหนึ่งในทฤษฎีกราฟคือปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก มีอยู่ว่า ณ เมืองเคอนิกส์เบิร์กมีเกาะกลางแม่น้ำพรีเกล (*Pregel*) จำนวน 2 เกาะ และมีสะพานที่เชื่อมระหว่างเกาะและเมืองดังรูปที่ 5 ต่อไปนี้



รูปที่ 5

ชาวเมืองเคอนิกส์เบิร์กพยายามหาวิธีเดินข้ามสะพานให้ครบทุกสะพาน โดยที่ข้ามสะพานแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวและกลับมาที่จุดเริ่มต้น ปัญหานี้ไม่มีผู้ใดตอบได้จนกระทั่งปี 1736 เมื่อเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ใช้ความรู้ทฤษฎีกราฟตอบปัญหา โดยท่านนำกราฟมาสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของปัญหา ซึ่งให้จุดแทนบริเวณที่เป็นแผ่นดินนั่นคือจุดแทนเกาะและเมือง และเส้นแทนสะพาน ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

และท่านได้ตอบปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ว่าเป็นไปไม่ได้ที่จะหาทางเดินของปัญหาดังกล่าวและท่านยังวางนัยทั่วไปในการตอบคำถามปัญหาประเภทเดียวกันนี้และแนะนำมโนมติซึ่งเป็นที่รู้จักกันในปัจจุบันว่า "กราฟออยเลอร์เลียน (*Eulerian graph*)" จากนั้นเป็นต้นมานักคณิตศาสตร์ได้ให้ความสำคัญของทฤษฎีกราฟ จนกระทั่งปี 1936 *Dénes König* ได้เขียนหนังสือทฤษฎีกราฟเล่มแรกขึ้นมา

1.2 บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทที่เป็นความรู้พื้นฐานของทฤษฎีกราฟที่ใช้ในการวิจัย

บทนิยาม 1.2.1 กราฟ $G=(V,E)$ ประกอบไปด้วยเซต $V \neq \varnothing$ และเซต E ซึ่งเป็นเซตของคู่ที่ไม่เป็นคู่อันดับ (*unordered pair*) ของสมาชิกของ V เราเรียกสมาชิกของ V ว่า**จุด** (*vertex* หรือ *node*) และสมาชิกของ E ว่า**เส้น** (*edge* หรือ *line*)

ในบางครั้งถ้าต้องการระบุว่า V และ E เป็นเซตของจุด และเซตของเส้นของกราฟ G เราจะเขียนแทนด้วย $V(G)$ และ $E(G)$

บทนิยาม 1.2.2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า u **ประชิด**(*adjacent*) กับ v เมื่อมีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และเขียนแทนเส้นดังกล่าวด้วย uv และจะเรียก u และ v ว่า**จุดปลายของเส้น** uv

ถ้า $e=uv$ เป็นเส้นในกราฟ G แล้ว เรากล่าวว่าจุด u **ตกกระทบ**(*incident*) กับเส้น e หรือ เส้น e ตกกระทบกับจุด u

และถ้า $e \neq f$ เป็นเส้นใน G ที่ตกกระทบกับจุดเดียวกันแล้ว เรากล่าวว่า e **ประชิด**กับ f หรือ e และ f ประชิดกัน

โดยทั่วไปเราจะแทนจุดในกราฟด้วยจุดในระนาบและเส้นในกราฟด้วยเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดในระนาบ และเป็นที่เข้าใจกันว่าในการเขียนรูปของกราฟนั้นจะไม่มีเส้นใดตัดกับตัวมันเองหรือลากผ่านจุดที่ไม่ใช่จุดปลายของเส้นนั้น ยิ่งไปกว่านั้นเส้นสองเส้นของกราฟอาจลากผ่านกันหรือตัดกันได้โดยไม่ทำให้เกิดจุดใหม่

บทนิยาม 1.2.3 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เราจะกล่าวว่า u และ v เป็น**จุดที่เป็นอิสระ** (*independent*) เมื่อ u ไม่ประชิดกับ v

ให้ e_1 และ e_2 เป็นเส้นในกราฟ G เราจะกล่าวว่า e_1 และ e_2 เป็น**เส้นที่เป็นอิสระ** (*independent*) เมื่อ e_1 ไม่ประชิดกับ e_2

บทนิยาม 1.2.4 ให้ $S \subseteq V(G)$ เราจะกล่าวว่า S เป็น**เซตของจุดที่เป็นอิสระ** ถ้า $u, v \in S$ แล้ว u และ v เป็นจุดที่เป็นอิสระ และกล่าวว่า S เป็น**เซตของจุดที่เป็นอิสระใหญ่สุด** เมื่อไม่มีเซตของจุดที่เป็นอิสระ S' ใดๆ ใน G ซึ่ง $|S'| > |S|$

ให้ $S \subseteq E(G)$ เราจะกล่าวว่า S เป็น**เซตของเส้นที่เป็นอิสระ** ถ้า e_1, $e_2 \in S$ แล้ว e_1 และ e_2 เป็นเส้นที่เป็นอิสระ

บทนิยาม 1.2.5 เราเรียกเส้นที่จุดปลายทั้งสองของเส้นเป็นจุดเดียวกันว่า **รูปบ่วง** (*loop*) เราเรียกเส้นตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดเดียวกันว่า **เส้นหลายชั้น** (*multiple edges*)

บทนิยาม 1.2.6 เราเรียกกราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้นและไม่มีรูปบ่วงว่า **กราฟอย่างง่าย** (*simple graph*)

เรากล่าวว่ากราฟ G เป็น**กราฟจำกัด** (*finite graph*) เมื่อเซตของจุดและเซตของเส้นของกราฟเป็นเซตจำกัด เราเรียกกราฟที่มีจุดเดียวว่า **กราฟทริเวียล** (*trivial graph*) และเรียกกราฟที่ไม่ใช่กราฟทริเวียลว่า **กราฟนอน – ทริเวียล** (*non – trivial graph*)

บทนิยาม 1.2.7 เรากล่าวว่า G เป็น**กราฟอันดับ** (*order*) n เมื่อจำนวนจุดใน G เท่ากับ n และกล่าวว่า G เป็น**กราฟขนาด** (*size*) m เมื่อจำนวนเส้นใน G เท่ากับ m เราจะใช้สัญลักษณ์ $\nu(G)$ แทนจำนวนจุดในกราฟ G และ $\varepsilon(G)$ แทนจำนวนเส้นในกราฟ G

บทนิยาม 1.2.8 ให้ u เป็นจุดในกราฟ G **ดีกรี** (*degree*) ของ u ใน G เขียนแทนด้วย $d_G(u)$ คือ จำนวนของเส้นใน G ที่ตกกระทบกับจุด u

ในกรณีที่เราทราบว่ากราฟที่กำลังกล่าวถึงเป็นกราฟใด เพื่อความสะดวกเราอาจเขียน $d(u)$ แทน $d_G(u)$ สำหรับจุด u ใดๆ ใน G

เราเรียกจุดที่มีดีกรี 0 ว่า**จุดเอกเทศ** (*isolated vertex*) และจุดที่มีดีกรี 1 ว่า **จุดปลาย** (*end-vertex*)

เราจะใช้สัญลักษณ์ $\delta(G)$ แทนดีกรีที่น้อยที่สุด (*minimum degree*) ของจุดใน G และ $\Delta(G)$ แทนดีกรีที่มากที่สุด (*maximum degree*) ของจุดใน G

บทนิยาม 1.2.9 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟใดๆ **ยูเนียน** (*union*) ของกราฟ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \cup G_2$ คือกราฟ G ที่มีเซตของจุด $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ และเซตของเส้น $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$

บทนิยาม 1.2.10 เราจะกล่าวว่ากราฟ G_1 และ G_2 เป็น**กราฟต่างสมาชิกกัน** (*disjoint graph*) เมื่อ $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$

ถ้ากราฟ G ประกอบไปด้วยกราฟ H จำนวน k กราฟ โดยที่กราฟ H เหล่านี้เป็นกราฟต่างสมาชิกกันแล้ว เราจะเขียนแทน G ด้วย kH

บทนิยาม 1.2.11 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่างสมาชิกกัน **การเชื่อม** (*join*) ของกราฟ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย G_1+G_2 หรือ $G_1 \vee G_2$ คือกราฟ G ที่มีเซตของจุด $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ และเซตของเส้น $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_1)$ และ $y \in V(G_2)\}$

บทนิยาม 1.2.12 เรากล่าวว่ากราฟ $H = (V(H)\ , E(H))$ และกราฟ $G = (V(G)\ , E(G))$ เป็น**กราฟเหมือนกัน** (*identical*) และเขียนแทนด้วย $H = G$ เมื่อ $V(H) = V(G)$ และ $E(H) = E(G)$

บทนิยาม 1.2.13 ให้ $H = (V(H)\ , E(H))$ และ $G = (V(G)\ , E(G))$ เป็นกราฟใดๆ เรากล่าวว่า H เป็น**สับกราฟ** (*subgraph*) ของ G เขียนแทนด้วย $H \subset G$ เมื่อ $V(H) \subseteq V(G)$ และ $E(H) \subseteq E(G)$

และกล่าวว่า H เป็น**สับกราฟแผ่ทั่ว** (*spanning subgraph*) ของ G หรือ G เป็น**ซุปเปอร์กราฟแผ่ทั่ว** (*spanning supergraph*) ของ H เมื่อ H เป็นสับกราฟของ G และ $V(H) = V(G)$

บทนิยาม 1.2.14 ให้ $G = (V(G)\ , E(G))$ เป็นกราฟใด ๆ และ $\varnothing \neq V' \subseteq V(G)$ เราเรียกสับกราฟ G' ของ G ที่มีเซตของจุดเท่ากับ V' และเซตของเส้นเท่ากับเซตของเส้นใน G ที่จุดปลายทั้งสองของเส้นแต่ละเส้นเป็นจุดใน V' ว่า **อินดิวซ์สับกราฟ** (*induced subgraph*) ของ G ที่เกิดจาก V' ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $G[V']$

บทนิยาม 1.2.15 ให้ $G = (V(G)\ , E(G))$ เป็นกราฟใด ๆ และ $\varnothing \neq V' \subseteq V(G)$ กราฟ $G - V'$ คือสับกราฟของ G ที่ได้จากการกำจัดจุดใน V' และเส้นทุกเส้นที่ประชิดกับจุดแต่ละจุดใน V' ในกรณีที่ $V' = \{v\}$ เราจะเขียนแทน $G - \{v\}$ ด้วย $G - v$

จากบทนิยามข้างต้นเราจะเห็นว่า $G[V(G) - V'] = G - V'$

บทนิยาม 1.2.16 ให้ $G = (V(G)\ , E(G))$ เป็นกราฟใดๆ และ $\varnothing \neq E' \subseteq E(G)$ เราเรียกสับกราฟ G' ของ G ที่มีเซตของจุดเท่ากับเซตของจุดปลายของเส้นใน E' และเซตของเส้นเท่ากับ E' ว่า **เส้น – อินดิวซ์สับกราฟ** (*edge – induced subgraph*) ของ G ที่เกิดจาก E' และเขียนแทนด้วย $G[E']$

บทนิยาม 1.2.17 ให้ $G = (V(G)\ , E(G))$ เป็นกราฟใดๆ และ $\varnothing \neq E' \subseteq E(G)$ กราฟ $G - E'$ คือสับกราฟแผ่ทั่วของ G ที่ได้จากการกำจัดเส้นใน E' ออกจาก $E(G)$

บทนิยาม 1.2.18 ให้ G เป็นกราฟอย่างง่าย เรากล่าวว่า G เป็น**กราฟบริบูรณ์** (*complete graph*) เมื่อจุด 2 จุดใดๆ ที่ต่างกันของ G เป็นจุดประชิดกัน

เราจะเขียนแทนกราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุด n จุดด้วย K_n

บทนิยาม 1.2.19 ให้ G เป็นกราฟอย่างง่าย **กราฟเติมเต็ม** (*complement of graph*) ของ G เขียนแทนด้วย $\overline{G}$ คือกราฟอย่างง่ายที่มีเซตของจุด $V(\overline{G})$ เท่ากับ $V(G)$ และ $uv \in E(\overline{G})$ ก็ต่อเมื่อ $uv \notin E(G)$

บทนิยาม 1.2.20 ให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟอย่างง่าย ถ้าเราสามารถแบ่งกั้น (*partition*) เซต V โดยที่ $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ และ $V_i \cap V_j = \varnothing$ สำหรับทุก ๆ $i \neq j$ และยิ่งไปกว่านั้น เส้นแต่ละเส้นใน G เป็นเส้นที่เชื่อมจุดที่อยู่ใน V_i ไปยัง V_j เมื่อ $i \neq j$ แล้ว เรากล่าวว่า G เป็น**กราฟ k-พาร์ไท** (*k-partite graph*) และเรียก $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ ว่า **เซตแบ่งกั้น**ของ G

ถ้า G เป็นกราฟ 1-พาร์ไท อันดับ n แล้ว $G = \overline{K}_n$ ในกรณีที่ $k = 2$ เราจะเรียกกราฟ 2 พาร์ไทว่า **กราฟไบพาร์ไท** (*bipartite graph*)

บทนิยาม 1.2.21 เรากล่าวว่ากราฟอย่างง่าย G เป็น**กราฟ k-พาร์ไทบริบูรณ์** (*complete k-partite graph*) เมื่อ G เป็นกราฟ k-พาร์ไทที่มีเซตแบ่งกั้น $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $u \in V_i$ และ $v \in V_j$ โดยที่ $i \neq j$ แล้ว $uv \in E(G)$

ถ้า $|V_i| = p_i$ แล้ว เราเขียนแทนกราฟ k-พาร์ไทบริบูรณ์ดังกล่าวด้วย $K_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ (ลำดับของ p_i ไม่เป็นสิ่งสำคัญ)

ขอให้สังเกตว่ากราฟ k-พาร์ไทบริบูรณ์เป็นกราฟบริบูรณ์เมื่อ $p_i = 1$ สำหรับทุก ๆ i โดยที่ $1 \leq i \leq k$ ในกรณีที่ G เป็นกราฟไบพาร์ไทบริบูรณ์ที่ (V_1, V_2) เป็นเซตแบ่งกั้น และ $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ เราจะเขียนแทน G ด้วย $K_{m,n}$

บทนิยาม 1.2.22 ให้ u และ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ (u และ v อาจเป็นจุดเดียวกัน) **ทางเดิน** $u-v$ (*$u-v$ walk*) ใน G คือลำดับสลับของจุดและเส้น

$$u = u_0 , e_1 , u_1 , e_2 , u_2 , \ldots , u_{n-1} , e_n , u_n = v$$

ที่เริ่มต้นด้วยจุด u และจบด้วยจุด v และสำหรับ $i = 1 , 2 , \ldots , n$ จุดปลายของเส้น e_i คือ u_{i-1} และ u_i และลำดับดังกล่าวเป็นลำดับจำกัด

ความยาวของทางเดิน u - v คือจำนวนของเส้นในลำดับซึ่งมีค่าเท่ากับ n กรณีที่ $n = 0$ เราเรียกทางเดินนั้นว่า **ทางเดินทริเวียล** (*trivial walk*) เราเรียก u_0 และ u_n ว่า **จุดเริ่มต้น** (*origin*) และ **จุดปลาย** (*terminus*) ของทางเดิน $u - v$ และเรียกจุด $u_1 , u_2 , \ldots , u_n$ ว่า **จุดภายใน** (*interval vertices*)

บทนิยาม 1.2.23 เรากล่าวว่าทางเดิน $u - v$ เป็น**ทางเดินปิด** (*closed walk*) เมื่อความยาวทางเดิน $u - v$ มีค่าเป็นบวกและ $u = v$ และเป็น**ทางเดินเปิด** (*open walk*) เมื่อ $u \neq v$

บทนิยาม 1.2.24 เรากล่าวว่าทางเดิน $u - v$ เป็น**ทางเดินไม่ซ้ำ** (*trail*) เมื่อเส้นในทางเดิน $u - v$ ไม่ซ้ำกัน และเป็น**วิถี** (*path*) เมื่อจุดไม่ซ้ำ และจะเรียกกราฟใดๆ ที่เป็นวิถีว่า วิถี และเขียนแทนวิถีอันดับ n ด้วย P_n

บทนิยาม 1.2.25 เราเรียกทางเดินไม่ซ้ำปิดที่ไม่ใช่ทางเดินทริเวียลว่า **วง** (*circuit*) และเรียกวงที่มีจุดเริ่มต้นและจุดภายในไม่ซ้ำกันว่า **วัฏจักร** (*cycle*)

บทนิยาม 1.2.26 เราเรียกวัฏจักรที่มีความยาวเป็นคู่ว่า **วัฏจักรคู่** (*even cycle*) และเรียกวัฏจักรความยาวเป็นคี่ว่า **วัฏจักรคี่** (*odd cycle*)

ในกรณีที่ความยาวของวัฏจักรเท่ากับ 3 เรานิยมเรียกวัฏจักรนี้ว่า **สามเหลี่ยม** (*triangle*) และเรียกกราฟใด ๆ ที่เป็นวัฏจักรว่า วัฏจักร และเขียนแทนวัฏจักรอันดับ n ด้วย C_n

บทนิยาม 1.2.27 เราเรียกกราฟว่า กราฟ**แฮมิลโทเนียน** (*Hamiltonian Graph*) ถ้ากราฟมีวัฏจักรซึ่งผ่านจุดทุกจุดในกราฟ

บทนิยาม 1.2.28 ให้ u และ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ G เรากล่าวว่า u และ v **เชื่อมโยงกันได้** (*connect*) เมื่อมีวิถี $u - v$ และกล่าวว่า กราฟ G เป็น**กราฟไม่ขาดตอน** (*connected graph*)

เมื่อจุดสองจุดใดๆ ใน G เชื่อมโยงกันได้ มิฉะนั้นแล้ว G เป็น**กราฟขาดตอน** (*disconnected graph*)

ความสัมพันธ์ "เชื่อมโยงกันได้" เป็นความสัมพันธ์สมมูล(*equivalence relation*) บนเซตของจุดในกราฟซึ่งจะมีการแบ่งกั้นเซต $V(G)$ ของกราฟ G ไปเป็นเซต $V_1, V_2, \ldots, V_\omega$ โดยที่แต่ละ $V_i \neq \varnothing$ และจุด u และ v ใน G เชื่อมโยงกันได้ ก็ต่อเมื่อ u และ v เป็นสมาชิกในเซต V_i โดยที่ $1 \leq i \leq \omega$ เราเรียกอินดิวซ์สับกราฟ $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_\omega]$ ว่า **คอมโพแนนท์** (*component*)ของ G เราจะเขียนแทนจำนวนคอมโพแนนท์ของกราฟ G ด้วย $\omega(G)$

บทนิยาม 1.2.29 เราเรียกคอมโพแนนท์ที่มีอันดับคี่ว่า **คอมโพแนนท์คี่** (*odd component*) เขียนแทนจำนวนคอมโพแนนท์คี่ของกราฟ H ด้วย $o(H)$

และเรียกคอมโพแนนท์ที่มีอันดับคู่ว่า **คอมโพแนนท์คู่** (*even component*)

บทนิยาม 1.2.30 ให้ G เป็นกราฟใดๆ **ค่าจุดเชื่อมโยง** (*vertex – connectivity* หรือ *connectivity*) ของ G เขียนแทนด้วย $\kappa(G)$ คือจำนวนจุดใน G ที่น้อยที่สุดซึ่งเมื่อกำจัดออกจาก G แล้ว ทำให้กราฟที่เหลือเป็นกราฟขาดตอนหรือกราฟทริเวียล

บทนิยาม 1.2.31 เราเรียกกราฟ G ว่า**กราฟ k-จุดเชื่อมโยง** (*k - connected graph*) โดยที่ $k \geq 1$ เมื่อ $\kappa(G) \geq k$

บทนิยาม 1.2.32 ให้ G เป็นกราฟใดๆ **ค่าเส้นเชื่อมโยง** (*edge – connectivity*) ของ G เขียนแทนด้วย $\kappa'(G)$ คือจำนวนเส้นใน G ที่น้อยที่สุดซึ่งเมื่อกำจัดออกจาก G แล้ว ทำให้กราฟที่เหลือเป็นกราฟขาดตอนหรือกราฟทริเวียล

บทนิยาม 1.2.33 เราเรียกกราฟ G ว่า**กราฟ k-เส้นเชื่อมโยง** (*k – edge connected graph*) โดยที่ $k \geq 1$ เมื่อ $\kappa'(G) \geq k$

บทนิยาม 1.2.34 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน และ $S \subseteq V(G)$ เราจะเรียก S ว่า**เซตของจุดตัด** (*cut set*) เมื่อ $G - S$ เป็นกราฟขาดตอน

เราจะกล่าวว่า S เป็น**เซตของจุดตัดที่เล็กที่สุด (*minimum cutset*)** ถ้า $S' \subseteq V(G)$ เป็นเซตของจุดตัดใดๆ แล้ว $|S| \leq |S'|$

ถ้า S มีสมาชิกเพียง 1 สมาชิกเราจะเรียกสมาชิกนั้นว่า **จุดตัด** (*cut vertex*)

บทนิยาม 1.2.35 ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟใดๆ และ $M \subseteq E(G)$ เรากล่าวว่า M เป็น**การจับคู่** (*matching*) ใน G เมื่อเส้นแต่ละเส้นใน M ไม่เป็นรูปบ่วงและเส้น 2 เส้นใดๆ ใน M ไม่เป็นเส้นประชิดกัน และกล่าวว่า M เป็น**การจับคู่ใหญ่สุด** (*maximum matching*) เมื่อไม่มีการจับคู่ M' ใดๆ ใน G ซึ่ง $|M'| > |M|$

บทนิยาม 1.2.36 ให้ M เป็นการจับคู่ในกราฟ G เราจะกล่าวว่า M เป็น**การจับคู่สมบูรณ์** (*perfect matching*) เมื่อทุกๆ จุดใน G ถูกจับคู่โดย M

บทนิยาม 1.2.37 ให้ G เป็นกราฟ และ X เป็นการจับคู่ในกราฟ G เราจะกล่าวว่า X **สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์** ถ้ามี M เป็นการจับคู่สมบูรณ์ใน G ซึ่ง $X \subseteq M$

บทนิยาม 1.2.38 ให้ G เป็นกราฟและ $S \subseteq V(G)$ เราจะกล่าวว่า S' เป็น **ย่านเซต** (*neighbour set*) ของ S ในกราฟ G เมื่อ S' เป็นเซตของจุดใน $V(G) - S$ ที่ประชิดกับจุดใน S เราจะเขียนแทนย่านเซตของ S ในกราฟ G ด้วย $N_G(S)$

ในกรณีที่ $S = \{v\}$ เราเขียนแทน $N_G(\{v\})$ ด้วย $N_G(v)$

บทนิยาม 1.2.39 เรากล่าวว่ากราฟ G **สามารถฝังใน** (*embed*) ลงบนพื้นผิว S ได้ ถ้าเราสามารถเขียนกราฟ G ลงบน S โดยที่เส้นของ G ตัดกันที่จุดปลายของเส้นเท่านั้น และเรียกการเขียนดังกล่าวนี้ว่า**การฝังในของ G ลงบน** S (*imbedding of G on S*)

บทนิยาม 1.2.40 เรากล่าวว่า G เป็น**กราฟเชิงระนาบ (*planar graph*)** เมื่อ G สามารถฝังในลงบนระนาบ

บทนิยาม 1.2.41 ให้ G เป็นกราฟซึ่งไม่เป็นกราฟบริบูรณ์ *toughness* ของ G เขียนแทนด้วย $tough(G)$ คือ $min\{\frac{|S|}{\omega(G-S)} \mid S$ เป็นเซตของจุดตัดของ $G\}$ และถ้า G เป็นกราฟบริบูรณ์จะให้ $tough(G) = +\infty$

บทนิยาม 1.2.42 เราจะเรียกเส้นของกราฟ G ว่า**เส้น** *allowed* ถ้าเส้นดังกล่าวอยู่ในการจับคู่สมบูรณ์บางการจับคู่สมบูรณ์ มิฉะนั้นแล้วเราจะเรียกว่า**เส้น** *forbidden*

บทนิยาม 1.2.43 เราจะกล่าวว่ากราฟ G เป็น**กราฟ** *elementary* ถ้าเส้น *allowed* ของ G ประกอบเป็นสับกราฟไม่ขาดตอนของ G

บทนิยาม 1.2.44 เราจะกล่าวกราฟ G เป็น**กราฟ** *bicritical* ถ้ากำจัดจุด 2 จุดใดๆ ของกราฟแล้วกราฟที่เหลือมีการจับคู่สมบูรณ์

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานของทฤษฎีกราฟที่ใช้ในการวิจัยซึ่งจะกล่าวเฉพาะตัวทฤษฎีบทโดยจะละการพิสูจน์ไว้ สำหรับผู้ที่สนใจบทพิสูจน์ศึกษาได้จาก นวรัตน์ [1]

ทฤษฎีบท 1.2.1 : **ทฤษฎีบทของทัตต์** (*Tutte's Theorem*)

ให้ G เป็นกราฟนอน – ทริเวียล G มีการจับคู่สมบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $o(G-S) \le |S|$ สำหรับทุกๆ สับเซตแท้ S ของ $V(G)$

ทฤษฎีบท 1.2.2 : **ทฤษฎีบทของดีราก** (*Dirac's Theorem*)

ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายอันดับ $n \ge 3$ ถ้า $\delta(G) \ge \frac{1}{2}\nu(G)$ แล้ว G เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

บทที่ 2
วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะศึกษาความเป็นมาและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องของกราฟ *strongly*(k,n)*-extendable* โดยจะแบ่งหัวข้อที่จะศึกษาออกเป็น 2 หัวข้อ คือ หัวข้อแรกเราจะศึกษาความเป็นมาและแนวคิดของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* และหัวข้อที่ 2 เราจะศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ก่อนที่เราจะศึกษาความเป็นมาและแนวคิดของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* เราจะเริ่มต้นด้วยการให้บทนิยามของกราฟ n*-extendable* และกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* โดยที่คำว่ากราฟต่อไปนี้ จะหมายถึงกราฟอย่างง่ายซึ่งเป็นกราฟไม่ขาดตอนและเป็นกราฟจำกัด

ให้ k , n และ p เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ G เป็นกราฟอันดับ p โดยที่ $p \geq 2n+2$ และ $n \geq 1$ เราจะเรียก G ว่า**กราฟ** n*-extendable* ถ้าทุกๆ การจับคู่ขนาด n ในกราฟ G สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ และเรียก G ว่า**กราฟ 0**-*extendable* ถ้า G มีการจับคู่สมบูรณ์ เราจะเรียก G ซึ่งเป็นกราฟอันดับ p โดยที่ $p \geq 2n+k+2$ ว่า**กราฟ** *strongly* (k,n)*-extendable* ถ้ากำจัดจุดจำนวน k จุดใด ๆ ในกราฟแล้วทำให้กราฟที่เหลือเป็นกราฟ n*-extendable*

2.1 ความเป็นมาและแนวคิดของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ความเป็นมาของการศึกษากราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* เริ่มต้นมาจากการศึกษากราฟ n*-extendable* ซึ่งในปี 1980 *M.D. Plummer* [32] ได้วางรากฐานการศึกษากราฟ n*-extendable* โดยท่านได้ศึกษาเงื่อนไขเพียงพอของกราฟ n*-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ n*-extendable* ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยง และการเป็นกราฟ m*-extendable* โดยที่ m ขึ้นกับค่าของ n ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.1 ให้ n และ p เป็นจำนวนเต็มบวก และ G เป็นกราฟอันดับ p จะได้

(1) ถ้า G เป็นกราฟ *n-extendable* แล้ว G เป็นกราฟ $(n-1)$-*extendable*

(2) ถ้า G เป็นกราฟ *n-extendable* และเป็นกราฟไม่ขาดตอน แล้ว G เป็นกราฟ $(n+1)$-จุดเชื่อมโยง

(3) ถ้า $p \geq 4$ และ $\delta(G) \geq \frac{p}{2}+n$ แล้ว G เป็นกราฟ *n-extendable*

ทฤษฎีบท 2.1.1 เป็นรากฐานสำคัญของการศึกษากราฟ *n-extendable* และยังเป็นทฤษฎีบทพื้นฐานในการศึกษากราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* โดยผลของทฤษฎีบท 2.1.1(2) เราจะได้ว่า ถ้า G เป็นกราฟ *n-extendable* แล้ว $\delta(G) \geq n+1$ แต่ผลที่ได้นั้นไม่ได้ครอบคลุมขอบเขตของดีกรีที่น้อยที่สุด ซึ่ง *N. Ananchuen* และ *L. Caccetta* [4] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุดที่ครอบคลุมขอบเขตของดีกรีที่น้อยที่สุดดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.2 ถ้า G เป็นกราฟ *n-extendable* ที่มีอันดับ p แล้ว $n+1 \leq \delta(G) \leq \frac{p}{2}$ หรือ $\delta(G) \geq 2n+1$

นอกจากนั้นท่านยังได้แสดงว่า

$$\varsigma(p,n,j) \neq \varnothing$$

โดยที่ $\varsigma(p,n,j)$ เป็นคลาสของกราฟ *n-extendable* อันดับ p ที่มีดีกรีเท่ากับ j สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก j ซึ่ง $j \in [n+1, \frac{p}{2}] \cup [2n+1, p-1]$
นั่นคือท่านได้แสดงว่ามีกราฟ *n-extendable* ที่มีดีกรีที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 2.1.2

หลังจากในปี 1980 ที่ *M.D. Plummer*[32] ได้ให้ทฤษฎีบท 2.1.1(2) ไว้ *M.D. Plummer*[30] และ *D.A. Holton* และ *M.D. Plummer*[18] ได้ศึกษากราฟ *n-extendable* ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยงเพิ่มเติมขึ้น โดยท่านได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของลักษณะของเซตของจุดตัด ในแง่ของจำนวนของคอมโพเนนท์คู่และคี่ที่เกิดจากการจำกัดเซตของจุดตัด และท่านยังได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของ *cyclic connectivity* ของกราฟ โดยที่ *cyclic connectivity* ของกราฟ คือจำนวนเส้นที่น้อยที่สุดเมื่อกำจัดแล้วในกราฟที่เหลือจะมีคอมโพเนนท์จำนวน 2 คอมโพเนนท์ ซึ่งแต่ละคอมโพเนนท์มีวัฏจักร ต่อมา

D. Lou[23] ได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยงของอินดิวซ์สับกราฟที่เกิดจาก $\{v\} \cup N(v)$ โดยที่ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ

ในปี 1988 *M.D. Plummer*[31] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างกราฟ *n-extendable* กับค่า *toughness* โดยท่านให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของค่า *toughness* และยังแสดงว่าขอบเขตของค่า *toughness* เป็นค่าที่คมและท่านยังให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *n-extendable* อันดับ p เมื่อ $n \geq \lfloor (\frac{p}{2}-1)/3 \rfloor + 1$ ในแง่ของค่า *toughness*

ในลักษณะที่คล้ายกับการศึกษาค่า *toughness* ของกราฟ *C. Chen*[10] ได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของค่า *binding number* ซึ่ง *D.R. Woodall* ได้ให้นิยาม *binding number* ของกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $bind(G)$ ดังนี้

$$bind(G) = \min\{ \frac{|N_G(X)|}{|X|} \mid \varnothing \neq X \subseteq V(G) \text{ และ } N_G(X) \neq V(G) \}$$

M.D. Plummer[29] ได้ศึกษากราฟ *n-extendable* ที่เป็นกราฟเชิงระนาบ ท่านได้แสดงว่าไม่มีกราฟเชิงระนาบที่เป็นกราฟ *3-extendable* และแสดงว่าถ้า G เป็นกราฟ *2-extendable* แล้ว G เป็นกราฟไบพาร์ไทหรือเป็นกราฟ *bicritical* ในปีต่อมา *M.D. Plummer* [28] ได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *n-extendable* ในแง่ผลรวมดีกรีของจุดที่เป็นอิสระและขนาดของการยูเนียนของย่านเซตของจุดที่เป็นอิสระ

N. Ananchuen และ *L. Caccetta*[5] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของค่า *independence number* โดยที่ *independence number* คือจำนวนจุดของเซตของจุดที่เป็นอิสระใหญ่สุด อีก 1 ปีต่อมา *P. Maschlanka* และ *L. Volkmann*[24] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของค่า *independence number*

นอกจากการศึกษาพารามิเตอร์ในกราฟกับการเป็นกราฟ *n-extendable* แล้วยังมีนักวิจัยศึกษาผลกระทบของการกำจัดเส้นและการเพิ่มเส้นของกราฟ *n-extendable* ซึ่ง *M.D. Plummer*[30] ได้ศึกษาผลกระทบที่เกิดจากการกำจัดเส้นของกราฟ *n-extendable* ในปี 1988 ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.3 ถ้า G เป็นกราฟ *n-extendable* โดยที่ $n \geq 1$ และ $e \in E(G)$ แล้ว $G - e$ เป็นกราฟ $(n-1)$*-extendable*

หลังจากท่านได้ให้ทฤษฎีบท 2.1.3 *A. Saito*[34] ได้พิจารณากรณีการเพิ่มเส้นในกราฟ *n-extendable* และให้ *conjecture* ดังนี้

Saito's conjecture. ถ้า G เป็นกราฟ *n-extendable* อันดับ $2r$ โดยที่ G ไม่เป็นกราฟ $K_{r,r}$ หรือ K_{2r} แล้วจะมี $e \in E(\bar{G})$ ซึ่ง $G+e$ เป็นกราฟ *n-extendable*

Q. Yu[37] ได้แสดงว่า *Saito's conjecture* เป็นจริงสำหรับกราฟไบพาร์ไทเท่านั้นแต่ไม่เป็นจริงสำหรับกราฟที่ไม่เป็นกราฟไบพาร์ไท และท่านยังให้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.4 ถ้า G เป็นกราฟ *n-extendable* ซึ่งไม่เป็นกราฟไบพาร์ไท โดยที่ $n \geq 1$ และ $e \in E(\bar{G})$ แล้ว $G+e$ เป็นกราฟ $(n-1)$*-extendable*

ต่อมามีนักวิจัยสนใจกราฟ G ที่เป็นกราฟ *n-extendable* แต่ $G+e$ ไม่เป็นกราฟ *n-extendable* สำหรับทุกๆ $e \in E(\bar{G})$ ซึ่งจะเรียกกราฟ G นี้ว่ากราฟ *maximal n-extendable* *N. Ananchuen* และ *L. Caccetta* [8] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *maximal n-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด และให้ลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ *maximal* 1*-extendable* และ *maximal* $(n-1)$*-extendable* ที่มีอันดับ $2n$ ว่ากราฟดังกล่าวจะต้องเป็นกราฟ $K_{n,n}$ หรือกราฟ K_{2n} เท่านั้น นอกจากนั้นยังได้ให้ลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ *maximal* $(n-2)$*-extendable* เมื่อ $2n \geq 10$ ด้วย *C. Chen*[9] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *maximal n-extendable* ในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์คี่ของกราฟที่เกิดจากการจำกัดเซตของจุดตัดในกราฟรวมทั้งคุณสมบัติของเซตของจุดตัด

ในแนวคิดอีกแง่หนึ่งที่ตรงข้ามกับกราฟ *maximal n-extendable* คือกราฟ *minimally n-extendable* ซึ่งจะกล่าวว่า G เป็นกราฟ *minimally n-extendable* เมื่อ $G-e$ ไม่เป็นกราฟ *n-extendable* สำหรับทุกๆ $e \in E(G)$ *N. Ananchuen* และ *L. Caccetta* [7] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *minimally n-extendable* ในแง่การจับคู่ในกราฟที่ถูกกำจัดเส้นใดๆ จำนวน 1 เส้น และให้ลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ *minimally* $(n-1)$*-extendable* ที่มีอันดับ $2n$ ว่ากราฟดังกล่าวจะต้องเป็นกราฟ $K_{n,n}$ หรือกราฟ K_{2n} เท่านั้น

นอกจากนั้นท่านยังได้ให้ลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ $(n-2)$-*extendable* ที่มีอันดับ $2n$ และลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ *minimally* $(n-2)$-*extendable* ที่มีอันดับ $2n$

ใน [32] *M.D. Plummer* ได้แสดงว่ากราฟที่มีค่าจุดเชื่อมโยงสูง ไม่จำเป็นจะต้องเป็นกราฟ *n-extendable* แต่ใน [27] ท่านได้แสดงว่ากราฟที่มีค่าจุดเชื่อมโยงสูง แต่ไม่มี $K_{1,3}$ เป็นอินดิวซ์สับกราฟจะเป็นกราฟ *n-extendable* เราจะเรียกกราฟที่ไม่มี $K_{1,3}$ เป็นอินดิวซ์สับว่า**กราฟ** *claw –free* ท่านยังให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *claw-free* ที่เป็นกราฟ *n-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด *C. Chen*[9] ได้ขยายแนวคิดของ *M.D. Plummer* ในการศึกษากราฟ $K_{1,3}$ ไปยังกราฟ $K_{1,k}$-*free* เราจะเรียก G ว่า**กราฟ** $\boldsymbol{K_{1,k}}$ -*free* เมื่อ G ไม่มี $K_{1,k}$ เป็นอินดิวซ์สับกราฟ ท่านได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *n-extendable* ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยงของกราฟที่เป็นกราฟ $K_{1,k}$-*free*

ให้ G เป็นกราฟ กราฟ**กำลังที่** m **ของ** G เขียนแทนด้วย G^m คือกราฟที่มีเซตของจุดคือ $V(G)$ และจุด 2 จุดใดๆ ในกราฟ G^m ประชิดกันเมื่อระยะทางจากจุด 2 จุดในกราฟ G มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ m กราฟ *line graph* ของ G เขียนแทนด้วย $L(G)$ เป็นกราฟซึ่งมีเซตของจุดคือ $E(G)$ และจุด 2 จุดใดๆ ของกราฟ $L(G)$ ประชิดกันเมื่อจุด 2 จุดนั้นเป็นเส้นที่ประชิดกันในกราฟ G ส่วน *total graph* ของ G เขียนแทนด้วย $T(G)$ เป็นกราฟซึ่งมีเซตของจุดคือ $V(G) \cup E(G)$ และจุด 2 จุดใดๆ ในกราฟ $T(G)$ ประชิดกันเมื่อ จุด 2 จุดนั้นประชิดกันหรือตกกระทบกันในกราฟ G *D.A. Holton , D. Lou* และ *K.L. McAvaney*[17] ได้แสดงว่า *line graph , total graph* และกราฟกำลัง ที่มีจุดเชื่อมโยงที่มีค่าสูงพอจะเป็นกราฟ *n-extendable*

ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟ *Cartesian product* ของกราฟ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \times G_2$ คือกราฟที่มี

$$V(G_1 \times G_2) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in V(G_1),\ x_2 \in V(G_2)\}$$

และ (x_1, x_2) และ (y_1, y_2) ประชิดกันก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1$ และ $x_2\, y_2 \in E(G_2)$ หรือ $x_2 = y_2$ และ $x_1\, y_1 \in E(G_1)$ *E. Gyori* และ *M.D. Pummer*[16] ได้แสดงว่าถ้า G_1 เป็นกราฟ k_1-*extendable* และ G_2 เป็นกราฟ k_2-*extendable* แล้ว $G_1 \times G_2$ เป็นกราฟ

$(k_1 + k_2 + 1)$-*extendable* หลังจากนั้น *J. Liu* และ *Q. Yu* [22] ได้แสดงว่า ถ้า G_1 เป็นกราฟ k-*extendable* และ G_2 เป็นกราฟไม่ขาดตอน แล้ว $G_1 \times G_2$ เป็นกราฟ $(k+1)$-*extendable*

ในปี 1898 *Julius Petersen* ได้สร้างกราฟ *Petersen* ซึ่งเป็นกราฟตัวอย่างค้านในการพิสูจน์ว่าข้อความ "ทุกๆ กราฟปรกติดีกรี 3 สามารถแยกตัวประกอบไปเป็นตัวประกอบดีกรี 1" เป็นเท็จ หลังจากนั้นนักวิจัยได้ให้บทนิยามทั่วไปของกราฟ *Petersen* (*generalized Petersen graph*) เราจะใช้สัญลักษณ์ $GP(h,t)$ แทนกราฟทั่วไปของกราฟ *Petersen* ซึ่งนิยามดังนี้ $GP(h,t)$ เป็นกราฟอันดับ $2h$ มีเซตของจุดคือ $\{v_0, v_1, \ldots, v_{h-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{h-1}\}$ และมีเส้นคือ $u_i u_{i+1}$, $u_i v_i$ และ $v_i v_{i+t}$ ทุกๆ $i = 0, 1, \ldots, h-1$ เราจะเห็นว่ากราฟ *Petersen* คือกราฟ $GP(5,2)$ *Q. Yu*[36] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ $GP(h,t)$ เมื่อ $h \geq t$ ในแง่ของการเป็นกราฟ 2-*extendable*

ในปี 1993 *Q. Yu* [35] ได้ขยายแนวคิดของกราฟ *n-extendable* อันดับคู่ไปศึกษาบนกราฟอันดับคี่ ท่านได้ให้บทนิยามของกราฟ $n\frac{1}{2}$ - *extendable* ว่าเป็นกราฟอันดับคี่ซึ่งเมื่อกำจัดจุด 1 จุดใดๆ ในกราฟแล้วกราฟที่เหลือเป็นกราฟ *n-extendable* ท่านได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ $n\frac{1}{2}$ - *extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุดและในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยงและเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ $n\frac{1}{2}$-*extendable* ในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์คี่

กราฟที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้อีกกราฟคือ กราฟ *k-factor-critical* เราจะเรียก G ว่ากราฟ *k-factor-critical* ถ้า $G - S$ มีการจับคู่สมบูรณ์สำหรับแต่ละ $S \subseteq V(G)$ ซึ่ง $|S| = k$ ในปี 1996 *O. Favaron*[13] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *k-factor-critical* ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยง ค่าเส้นเชื่อมโยง และการเป็นกราฟ *m-factor-critical* โดยที่ m ขึ้นกับค่าของ k ศึกษาเงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *k-factor-critical* ในแง่ของค่า *toughness* ในแง่ของขนาดของผลรวมดีกรีของแต่ละจุดในเซตที่เป็นอิสระ หรือ ขนาดจำนวนจุดของการยูเนียนย่านเซตของจุดในเซตที่เป็นอิสระ และเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์

ทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *k-factor-critical* ที่นำมาใช้ศึกษาในกราฟ *strongly* (k,n) – *extendable* คือเงื่อนไขจำเป็นในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยง เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.5 ถ้า G เป็นกราฟ *k- factor-critical* แล้ว G เป็นกราฟ k-จุดเชื่อมโยง

ทฤษฎีบท 2.1.6 ให้ G เป็นกราฟอันดับ p ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) G เป็นกราฟ *k-factor-critical*

(2) $o(G - S) \leq |S| - k$ สำหรับ $S \subseteq V(G)$ และ $|S| \geq k$

(3) $c(G - S) \leq |S| - k$ สำหรับ $S \subseteq V(G)$ และ $|S| \geq k$

โดยที่ $c(G - S)$ เป็นคอมโพแนนท์ของกราฟ $G - S$ ซึ่งไม่มีการจับคู่สมบูรณ์

ในปีเดียวกัน *O. Favaron* และ *M. Shi* [15] ยังได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *k-factor-critical* ในแง่ของลักษณะของแต่ละอินดิวซ์สับกราฟอันดับที่มากกว่า k

ในปี 1998 *O. Favaron* และ *M. Shi*[14] ได้ศึกษากราฟ *minimally k-factor-critical* ซึ่งมีคุณสมบัติว่าเมื่อกำจัดเส้นใดๆ ในกราฟ *k-factor-critical* จำนวน 1 เส้นแล้วกราฟที่เหลือจะไม่เป็นกราฟ *k-factor-critical* โดยท่านศึกษาเงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *minimally k-factor-critical* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด และยังให้ลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ $(k-4)$-*factor-critical* อันดับ $k \geq 6$ รวมทั้งให้ลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ *minimally* $(k-4)$-*factor-critical* อันดับ k

อีก 2 ปีต่อมา *O. Favaron*[12] ศึกษาความสัมพันธ์ของกราฟ *n-extendable* และกราฟ *k-factor-critical* ท่านได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *n-extendable* ในแง่ การเป็นกราฟ *k-factor-critical* โดยที่ n และ k มีความสัมพันธ์กัน ในปีเดียวกัน *T. Nishimura*[26] ได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *k-factor-critical* ในแง่ของการกำจัดจุด 2 จุดในกราฟแล้วกราฟที่เหลือเป็นกราฟ *k-factor-critical* โดยที่ จุด 2 จุดที่กำจัดนั้นเป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ *H. Enomoto* , *M.D. Plummer* และ *A. Saito*[11] ได้ให้เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *k-factor-critical* ในแง่ของขนาดของย่านเซตของจุดที่เป็นอิสระ *K. Kawarabayashi* , *K. Ota* และ *A. Saito*[19] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *k-factor-critical* ในแง่ของการเป็นกราฟแฮมิลโทเนียน *M.D. Plummer* และ *A. Saito*[33] รวมทั้ง *T. Nishimura*[25] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *k-factor-critical* ในแง่โคลเชอร์ของกราฟ ซึ่งโคลเชอร์ของกราฟ G คือ กราฟที่ได้จากการเชื่อมจุด 2 จุดที่ไม่ประชิดกันใน G แต่มีคุณสมบัติตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งการเชื่อมจุดดังกล่าวกระทำไปจนกระทั่งไม่มีจุดที่มีคุณสมบัติตามเงื่อนไขที่กำหนดให้เหลืออยู่

ต่อมาในปี 2001 *N. Ananchuen* [2] ได้ศึกษาลักษณะทั่วไปของกราฟ *bicritical* โดยศึกษากราฟ *strongly n-extendable* ซึ่งเราจะเรียกกราฟ G ว่ากราฟ *strongly n-extendable* เมื่อกำจัดจุดจำนวน 2 จุดใดๆ ในกราฟ G แล้วกราฟที่เหลือเป็นกราฟ *n-extendable* จะเห็นว่ากราฟ *strongly* 0*-extendable* คือกราฟ *bicritical* และกราฟ *strongly n-extendable* เป็นกราฟอันดับคู่ ท่านได้ศึกษาคุณสมบัติของกราฟ *strongly n-extendable* ศึกษาเงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly n-extendable* ในแง่ของการเป็นกราฟ *m-extendable* โดยที่ m ขึ้นอยู่กับค่าของ n เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *strongly n-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุดและการเป็นกราฟ *m-extendable* และศึกษาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly n-extendable* ในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์คี่

ในปีเดียวกัน *N. Ananchuen* [3] ยังได้ศึกษาเงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly n-extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด และแสดงว่ามีกราฟ *strongly n-extendable* อันดับ p ที่มีดีกรีที่น้อยที่สุดคือ r ในช่วงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ในปี 2001 *G. Liu* และ *Q. Yu* [21] ได้ศึกษา**กราฟ (k,n,d)** ซึ่งเราจะเรียกกราฟ G ว่ากราฟ (k,n,d) ถ้ากำจัดจุดใดๆ จำนวน k จุดแล้ว กราฟที่เหลือมี M' เป็นการจับคู่ขนาด n และมี M เป็นการจับคู่ ซึ่ง $M' \subseteq M$ โดยที่ มีจุดเพียง d จุดเท่านั้นที่ไม่ตกกระทบกับการจับคู่ของ M เราจะเห็นว่ากราฟ $(k,n,0)$ เป็นกราฟ *strongly* (k,n) – *extendable* ดังนั้นเราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทของ *G. Liu* และ *Q. Yu* [21] ที่ใช้สำหรับในการวิจัย ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ (k,n,d) ในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์คี่

ทฤษฎีบท 2.1.7 G เป็นกราฟ (k,n,d) ก็ต่อเมื่อ

(1) สำหรับแต่ละ $S \subseteq V(G)$ และ $|S| \geq k$ จะได้ $o(G\text{-}S) \leq |S| - k + d$ และ

(2) สำหรับแต่ละ $S \subseteq V(G)$ ซึ่ง $|S| \geq k+2n$ และ $G[S]$ มีการจับคู่ขนาด n จะได้

$$o(G-S) \leq |S| - k - 2n + d$$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ (k,n,d) ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยง ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด ในแง่ของการเป็นกราฟ $m-$*extendable* โดยที่ m ขึ้นกับค่าของ k และ

n และในแง่ของการเป็นกราฟ (l,m,q) โดยที่ l ขึ้นกับค่าของ k , m ขึ้นกับค่าของ n และ q ขึ้นกับค่าของ d

ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ k , n และ d เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $k+2n+d \leq |V(G)|-2$ และ $|V(G)|-k-d \equiv 0 (mod\, 2)$ เราจะได้

(1) ถ้า G เป็นกราฟ $(k,n,0)$ โดยที่ $k \geq 1$ แล้ว G ไม่เป็นกราฟไบพาร์ไท

(2) ถ้า G เป็นกราฟ (k,n,d) แล้ว G เป็นกราฟ (k',n',d) เมื่อ $0 \leq k' \leq k$, $0 \leq n' \leq n$ และ $k \equiv k' (mod\, 2)$

(3) ถ้า G เป็นกราฟ $(k,n,0)$ แล้ว G เป็นกราฟ $(k\text{-}2,n+1,0)$

(4) ถ้า G เป็นกราฟ $(k,n,0)$ โดยที่ $k \geq 1$ และ $n \geq 2$ แล้ว G เป็นกราฟ $(k+2,n\text{-}2,0)$

(5) ถ้า G เป็นกราฟ $(k,n,0)$ โดยที่ $k \geq 2$ แล้ว G เป็นกราฟ $(k\text{-}2,n+1,0)$

(6) ถ้า G เป็นกราฟอันดับคู่ และเป็นกราฟ $(k,n,0)$ แล้ว G เป็นกราฟ $(n+\frac{k}{2})$-*extendable*

(7) ถ้า G เป็นกราฟไม่ขาดตอน และเป็นกราฟ $(k,n,0)$ โดยที่ $n \geq 1$ แล้ว G เป็นกราฟ $(n+k+1)$-จุดเชื่อมโยง

(8) ถ้า G เป็นกราฟ $(k,n,0)$ ที่มีอันดับ p แล้ว $n+k+1 \leq \delta(G) \leq \frac{p+k}{2}$ หรือ $\delta(G) \geq 2n+k+1$

G. Liu และ *Q. Yu* [21] ยังให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ $(k,n,0)$ ในแง่ของการเพิ่มเส้นในกราฟและการกำจัดเส้นในกราฟดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.9 ให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $k+2n \leq |V(G)|-2$ และ $|V(G)|-k \equiv 0 (mod\, 2)$ ถ้า G เป็นกราฟ $(k,n,0)$ เราจะได้

(1) ถ้า $n \geq 1$ และ $e \not\in E(G)$ แล้ว $G+e$ เป็นกราฟ $(k,n\text{-}1,0)$

(2) ถ้า $k \geq 2$ และ $e \not\in E(G)$ แล้ว $G+e$ เป็นกราฟ $(k\text{-}2,n,0)$

(3) ถ้า $k \geq 2$ และ $e \in E(G)$ แล้ว $G-e$ เป็นกราฟ $(k\text{-}2,n,0)$

(4) ถ้า $n \geq 1$ และ $e \in E(G)$ แล้ว $G-e$ เป็นกราฟ $(k,n\text{-}1,0)$

จากบทนิยามของกราฟต่างๆ ที่กล่าวมาแล้วจะเห็นว่า กราฟ $n\frac{1}{2}-extendable$ เป็นกราฟอันดับคี่ซึ่งเมื่อกำจัดจุด 1 จุดใดๆ แล้วกราฟที่เหลือเป็นกราฟ *n-extendable* และกราฟ *strongly n- extendable* เป็นกราฟอันดับคู่ซึ่งเมื่อกำจัดจุด 2 จุดใดๆ แล้วกราฟที่เหลือเป็นกราฟ *n-extendable* เพื่อเป็นการวางนัยทั่วไปของกราฟ $n\frac{1}{2}-extendable$ กราฟ *strongly n-extendable* และ กราฟ k–*factor – critical* เราจะศึกษากราฟ *strongly* $(k,n)-extendable$ จากบทนิยามของกราฟ *strongly* $(k,n)-extendable$ ขอให้สังเกตว่าถ้า p เป็นอันดับของกราฟ *strongly* $(k,n)-extendable$ แล้ว $p \equiv k(mod\ 2)$ ทำให้เราได้ว่ากราฟ *strongly* $(k,n)-extendable$ เป็นกราฟที่มี p และ k มีความสัมพันธ์กันแบบสภาวะคู่ นั่นคือ ถ้า p เป็นจำนวนคู่แล้ว k เป็นจำนวนคู่ และถ้า p เป็นจำนวนคี่แล้ว k เป็นจำนวนคี่

ขอให้สังเกตว่ากราฟ *strongly* $(0,n)-extendable$ คือกราฟ *n-extendable* กราฟ *strongly* $(2,0)-extendable$ คือกราฟ *bicritical* กราฟ *strongly* $(1,0)-extendable$ คือกราฟ *factor – critical* กราฟ *strongly* $(k,0)-extendable$ คือกราฟ k–*factor – critical* กราฟ *strongly* $(1,n)-extendable$ คือกราฟ $n\frac{1}{2}-extendable$ และกราฟ *strongly* $(2,n)-extendable$ คือกราฟ *strongly n–extendable* แต่กราฟ *strongly* $(k,n)-extendable$ เป็นกรณีเฉพาะของกราฟ (k,n,d) นั่นคือกราฟ *strongly* $(k,n)-extendable$ เป็นกราฟ $(k,n,0)$ แต่มีคุณสมบัติของกราฟ (k,n,d) บางคุณสมบัติไม่เป็นจริงสำหรับกรณี $d \geq 1$ เช่น จากทฤษฎีบท 2.1.8(7) จะเห็นว่าค่าจุดเชื่อมโยงของกราฟเป็นจริงสำหรับกรณี $d=0$ แต่เมื่อพิจารณากราฟ

$$K_m \vee K_1 \vee \overline{K}_d$$

โดยที่ $m \equiv k(mod 2)$ และ $m \geq 2n+k+2$ เราจะเห็นว่ากราฟ $K_m \vee K_1 \vee \overline{K}_d$ เป็นกราฟ (k,n,d) ซึ่งเป็นกราฟ 1-จุดเชื่อมโยง ดังนั้นทฤษฎีบท 2.1.8(7) ไม่จำเป็นต้องเป็นจริงสำหรับกรณี $d \geq 1$

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราจะศึกษาคุณสมบัติของกราฟ *strongly* (k,n)–*extendable* ที่ยังไม่ได้ศึกษาในกราฟ (k,n,d) ที่ *G. Liu* และ *Q. Yu* [21] ศึกษาไว้ซึ่งเราจะเห็นว่า ท่านยังไม่ศึกษาเงื่อนไขเพียงพอในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุดของกราฟ (k,n,d) เงื่อนไขจำเป็นในแง่ของขอบเขตของค่า *toughness* และขนาดการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[N(u)]$ เมื่อ u เป็นจุดในกราฟ *strongly* (k,n)–*extendable* ซึ่ง $d(u)=n+k+t$ โดยที่ $1 \leq t \leq n$ ดังนั้นเราจะศึกษา

คุณสมบัติเหล่านี้ในกราฟ *strongly* (k,n)– *extendable* และคุณสมบัติที่ยังไม่ได้ศึกษาในกราฟ (k,n,d) โดยจะแบ่งหัวข้อที่ศึกษากราฟ *strongly* (k,n)– *extendable* เป็น 2 บทด้วยกันคือบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยที่ในบทที่ 3 จะศึกษาคุณสมบัติต่างๆ ของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สำหรับในบทที่ 4 เราจะแสดงว่าเมื่อกำหนด p, k, n และ r ที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $p \geq 2n + k + 2$ จะมีกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรี r และศึกษาลักษณะของเส้นในกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ซึ่งเมื่อเพิ่มเส้นหรือกำจัดเส้น 2 เส้นแล้วทำให้กราฟที่ได้จะมีผลกระทบเหมือนกับการเพิ่มเส้นหรือกำจัดเส้น 1 เส้นในกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ตามลำดับ

2.2 ทฤษฎีบทจากงานวิจัยที่เกี่ยวกับกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟ n-*extendable* ที่นำไปใช้ในการศึกษากราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* โดยจะกล่าวเพียงเฉพาะตัวทฤษฎีบทและละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.2.1 (*C.H.C Little, D.D Grant and D.A. Holton* [20]) ให้ G เป็นกราฟซึ่งมีอันดับเป็นจำนวนคู่ จะได้ G เป็นกราฟ 1- *extendable* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $S \subseteq V(G)$

(1) $o(G\text{-}S) \leq |S|$ และ

(2) ถ้า $o(G\text{-}S) = |S|$ แล้ว S เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.2 (*Q. Yu* [35]) G เป็นกราฟ n–*extendable* ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ M ที่เป็นการจับคู่ในกราฟ G ซึ่ง $|M| = i$ โดยที่ $1 \leq i \leq n$ แล้ว กราฟ $G\text{-}V(M)$ เป็นกราฟ $(n\text{-}i)$-*extendable*

ทฤษฎีบท 2.2.3 (*Q. Yu* [35]) G เป็นกราฟ n-*extendable* โดยที่ $n \geq 1$ ก็ต่อเมื่อ
สำหรับแต่ละ $S \subseteq V(G)$

(1) $o(G\text{-}S) \leq |S|$ และ

(2) ถ้า $o(G\text{-}S) = |S|\text{-}2k$ โดยที่ $0 \leq k \leq n\text{-}1$ แล้ว $F(S) \leq k$ โดยที่ $F(S)$ เป็นขนาดของการจับคู่ใหญ่สุด ในกราฟ $G[S]$

บทที่ 3

เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ในบทนี้เราจะศึกษาคุณสมบัติต่างๆ ของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ในแง่ของเงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* และ เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

3.1 เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

จากทฤษฎีบท 2.1.8(6) เราจะเห็นว่า *G. Liu* และ *Q. Yu* [21] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ในแง่การเป็นกราฟ m*-extendable* โดยที่ค่าของ m ขึ้นกับค่าของ k และ n ในหัวข้อนี้เราศึกษาเงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ในแง่การเป็นกราฟ $l\frac{1}{2}$*-extendable* และกราฟ q*-factor – critical* โดยที่ค่าของ l และ q ขึ้นกับค่าของ k และ n เช่นกัน

ทฤษฎีบท 3.1.1 ถ้า G เป็นกราฟอันดับคี่ และเป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* แล้ว G เป็นกราฟ $(n+\frac{k-1}{2})\frac{1}{2}$*-extendable* ยิ่งไปกว่านั้นค่า $n+\frac{k-1}{2}$ เป็นค่าที่คม

พิสูจน์ ให้ $v \in V(G)$ จะแสดงว่า $G-v$ เป็นกราฟ $n+\frac{k-1}{2}$*-extendable*

ให้ M เป็นการจับคู่ในกราฟ $G-v$ ที่มีขนาดเท่ากับ $n+\frac{k-1}{2}$ โดยที่

$$M = \{\, u_1 v_1 \,,\, u_2 v_2 \,,\, \ldots \,,\, u_n v_n \,,\, u_{n+1} v_{n+1} \,,\, \ldots \,,\, u_{n+\frac{k-1}{2}} v_{n+\frac{k-1}{2}} \}$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

เราจะได้

$$G' = G - \{v, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+\frac{k-1}{2}}, v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+\frac{k-1}{2}}\}$$

เป็นกราฟ n*-extendable*

ดังนั้น $\{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$ สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G'
ให้ M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G' ซึ่ง $\{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\} \subseteq M'$
เราจะได้ $M' \cup \{u_{n+1}v_{n+1}, \ldots, u_{n+\frac{k-1}{2}}v_{n+\frac{k-1}{2}}\}$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - v$
ซึ่ง $M \subseteq M' \cup \{u_{n+1}v_{n+1}, \ldots, u_{n+\frac{k-1}{2}}v_{n+\frac{k-1}{2}}\}$ ดังนั้น G เป็นกราฟ $(n+\frac{k-1}{2})\frac{1}{2}$-*extendable*

ต่อไปจะแสดงว่าค่า $n+\frac{k-1}{2}$ เป็นค่าที่คม พิจารณากราฟ

$$G = K_1 \vee K_{2n+k+1} \vee K_{p-2n-k-2}$$

โดยที่ p และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ซึ่ง $p \equiv k(mod 2)$ และ $p \geq 2n+k+4$
จะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* แต่ G ไม่เป็นกราฟ $(n+\frac{k+1}{2})\frac{1}{2}$-*extendable*
เมื่อ p เป็นจำนวนคี่

ขั้นตอนแรกจะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*
ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
ให้

$$A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)$$

และให้ $r = 2n+k+1$

กรณีที่ 1 $V(K_1) \subseteq A$
เราจะได้ $G - A = K_{p-2n-k}$
เนื่องจาก $p \equiv k(mod 2)$ ทำให้ได้ว่า $p-2n-k$ เป็นจำนวนคู่
ดังนั้น $G - A$ มีการจับคู่สมบูรณ์

กรณีที่ 2 $V(K_1) \not\subseteq A$ นั่นคือ $V(K_1) \cap A = \varnothing$
ให้ $s = |A \cap V(K_{2n+k+1})|$
เราจะได้

$$G - A = K_1 \vee K_{r-s} \vee K_{p-r-1-(2n+k-s)}$$

เพราะว่า $r = 2n+k+1 > s$ และ $p-r-1 \geq 2n+k-s$
ทำให้เราได้ว่า $r-s \geq 1$ และ $p-r-1-(2n+k-s) \geq 0$
ให้ $x \in V(K_1)$ และ $y \in V(K_{2n+k+1} - A)$

เราจะได้

$$G-(A\cup\{x,y\}) = K_{p-r-1-(2n+k-s)+r-s-1} = K_{p-2n-k-2}$$

ดังนั้นมี M เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G-(A\cup\{x,y\})$

ทำให้เราได้ว่า $M\cup\{xy\}$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G-A$

ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ขั้นตอนสุดท้ายจะแสดงว่าถ้า p เป็นจำนวนคี่แล้ว G ไม่เป็นกราฟ $(n+\frac{k+1}{2})\frac{1}{2}$*-extendable*

จะเห็นได้ชัดว่า $V(K_{p-2n-k-2})\neq\varnothing$ เพราะว่า $p\geq 2n+k+4$

ให้ $v\in V(K_{p-2n-k-2})$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด $n+\frac{k+1}{2}$ ในกราฟ K_{2n+k+1}

เราจะได้ว่า $G-(\{v\}\cup V(M)) = K_1\cup K_{p-2n-k-3}$

เห็นได้ชัดว่ากราฟ $K_1\cup K_{p-2n-k-3}$ ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์

ดังนั้น G ไม่เป็นกราฟ $(n+\frac{k+1}{2})\frac{1}{2}$*-extendable* □

ทฤษฎีบท 3.1.2 ถ้า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* แล้ว

$$G \text{ เป็นกราฟ } \begin{cases} (k+n)\text{-}\textit{factor-critical} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ (k+n-1)\text{-}\textit{factor-critical} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ยิ่งไปกว่านั้นค่า $k+n$ ในกรณี n เป็นจำนวนคู่ และค่า $k+n-1$ ในกรณี n เป็นจำนวนคี่เป็นค่าที่คม

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* เราจะแยกการพิสูจน์เป็น 2 กรณีตามค่าของ n

กรณีที่ 1 n เป็นจำนวนคู่

จะแสดงว่า G เป็นกราฟ $(k+n)$- *factor –critical*

ให้ $\{v_1,v_2,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_{k+n}\}\subseteq V(G)$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

เราจะได้ $G' = G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ n*-extendable*

ให้ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดในกราฟ $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n}]$ และ $|M| = t$

จะเห็นว่า $0 \le t \le \frac{n}{2}$

เราจะได้ $|\{v_{k+1}, \ldots, v_{k+n}\}| - |V(M)| = n - 2t$

ให้ G'' เป็นกราฟที่เกิดจากกราฟ G' โดยการเพิ่มเส้นใน $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n}] - V(M)$ จำนวน $\frac{n}{2} - t$ เส้น โดยที่เซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n}] - V(M)$ เป็นการจับคู่

ให้ M' เป็นเซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n}] - V(M)$

เราจะได้ $|M \cup M'| = \frac{n}{2}$

โดยผลของทฤษฎีบท 2.1.4 เราจะได้ว่า G'' เป็นกราฟ $(n - (\frac{n}{2} - t))$ *-extendable*

เนื่องจาก $n - (\frac{n}{2} - t) \ge \frac{n}{2}$ และทฤษฎีบท 2.1.1(1)

เราจะได้ว่า G'' เป็นกราฟ $\frac{n}{2}$*-extendable*

ดังนั้น $M \cup M'$ สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G''

นั่นคือ จะมี M'' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G'' ซึ่ง $M \cup M' \subseteq M''$

เราจะได้ $M'' - (M \cup M')$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+n}\}$$

ดังนั้น G เป็นกราฟ $(k + n)$ - *factor – critical*

กรณีที่ 2 n เป็นจำนวนคี่

จะแสดงว่า G เป็นกราฟ $(k+n-1)$- *factor–critical*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+n-1}\} \subseteq V(G)$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

เราจะได้ $G' = G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ n*-extendable*

ให้ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n-1}]$ โดยที่ $|M| = t$

จะเห็นว่า $0 \le t \le \frac{n-1}{2}$

เราจะได้ $|\{v_{k+1}, \ldots, v_{k+n-1}\}| - |V(M)| = n - 1 - 2t$

ให้ G'' เป็นกราฟที่เกิดจากกราฟ G' โดยการเพิ่มเส้นใน $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n-1}] - V(M)$ จำนวน $\frac{n-1}{2} - t$ เส้น โดยที่เซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n-1}] - V(M)$ เป็นการจับคู่

ให้ M' เป็นเซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_{k+1}, \ldots, v_{k+n-1}] - V(M)$

เราจะได้ $|M \cup M'| = \frac{n-1}{2}$

โดยผลของทฤษฎีบท 2.1.4 เราจะได้ว่า G'' เป็นกราฟ $(n-(\frac{n-1}{2}-t))$ *-extendable*

เนื่องจาก $n-(\frac{n-1}{2}-t) \geq \frac{n-1}{2}$ และทฤษฎีบท 2.1.1(1)

เราจะได้ว่า G'' เป็นกราฟ $\frac{n-1}{2}$*-extendable*

ดังนั้น $M \cup M'$ สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G''

นั่นคือ จะมี M'' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G'' ซึ่ง $M \cup M' \subseteq M''$

เราจะได้ $M'' - (M \cup M')$ เป็นการจับคู่ในกราฟ

$$G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+n-1}\}$$

ดังนั้น G เป็นกราฟ $(k+n-1)$ - *factor – critical*

ต่อไปเราจะแสดงว่าค่า $k+n$ ในกรณี n เป็นจำนวนคู่ และค่า $k+n-1$ ในกรณี n เป็นจำนวนคี่เป็นค่าที่คม เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษากราฟ

$$G = \overline{K}_{n+k+1} \vee (K_p \cup K_q)$$

โดยที่ $p \geq q \geq 2n+k$, $n \geq 1$ และ $p+q+n+k+1 \equiv k(mod 2)$

จะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ให้

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M) ,$$

$$V_1 = V(K_p) - S ,$$

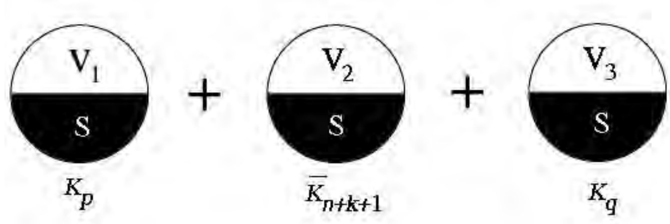
$$V_2 = V(\overline{K}_{n+k+1}) - S ,$$

และ

$$V_3 = V(K_q) - S$$

เราจะได้กราฟ G ที่ประกอบด้วยเซตของจุด S , V_1 , V_2 และ V_3 ดังรูปที่ 7

(สัญลักษณ์ + ในรูปจะแทนการเชื่อมของกราฟ)



G

รูปที่ 7

ก่อนอื่นขอให้สังเกตว่า $|V_1|+|V_2|+|V_3|$ เป็นจำนวนคู่ เพราะว่า

$$\begin{aligned}|V_1|+|V_2|+|V_3| &= |V(G)| - |S| \\ &= p+q+n+k+1-(2n+k) \\ &= p+q-n+1\end{aligned}$$

และ $p+q+n+k+1 \equiv k (mod 2)$

และจะเห็นได้ว่า $G-S$ มีการจับคู่สมบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ เราสามารถสร้างเซตแบ่งกั้น V_2 ออกเป็น 2 สับเซต V_2' และ V_2'' ซึ่ง $|V_2'| \le |V_1|$, $|V_2''| \le |V_3|$, $|V_1| \equiv |V_2'| (mod\ 2)$ และ $|V_3| \equiv |V_2''| (mod\ 2)$

ในการแสดงข้อความข้างต้นเพียงพอที่จะแสดงว่า $|V_1|+|V_3| \ge |V_2|$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}|V_1|+|V_3| &= |V(G)| - |S| - |V_2| \\ &= p+q+n+k+1-(2n+k) - |V_2| \\ &= p+q+1-n-|V_2| \\ &\ge p+q+1-n-(n+k+1) \\ &\ge (2n+k)+(2n+k)+1-n-(n+k+1) \\ &= 2n+k \\ &\ge n+k+1 \\ &\ge |V_2|\end{aligned}$$

ดังนั้น $G-S$ มีการจับคู่สมบูรณ์ ทำให้เราได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

ต่อไปจะแสดงว่าค่า $k+n$ ในกรณี n เป็นจำนวนคู่เป็นค่าที่คม นั่นคือจะแสดงว่ามีกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ที่ไม่เป็นกราฟ $(k+n+2)$ - *factor – critical*

พิจารณากราฟ

$$G = \overline{K}_{n+k+1} \vee (K_p \cup K_q)$$

โดยที่ $p \geq q \geq 2n+k$, $n \geq 1$, $p+q+n+k+1 \equiv k(mod 2)$ ซึ่ง p เป็นจำนวนคู่ และ q เป็นจำนวนคี่ โดยผลของการแสดงข้างต้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

ให้ $v \in V(K_p)$ เราจะเห็นได้ชัดว่า

$$G-(V(\overline{K}_{n+k+1}) \cup \{v\}) = (K_p - v) \cup K_q$$

ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์

ดังนั้น G ไม่เป็นกราฟ $(k+n+2)$- $factor-critical$

ท้ายสุดจะแสดงว่าค่า $k+n-1$ ในกรณี n เป็นจำนวนคี่เป็นค่าที่คม นั่นคือจะแสดงว่ามีกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ที่ไม่เป็นกราฟ $(k+n+1)$- $factor-critical$

พิจารณากราฟ

$$G = \overline{K}_{n+k+1} \vee (K_p \cup K_q)$$

โดยที่ $p \geq q \geq 2n+k$, $n \geq 1$, $p+q+n+k+1 \equiv k(mod 2)$ และ p , q เป็นจำนวนคี่

โดยผลของการแสดงข้างต้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* แต่

$$G - V(\overline{K}_{n+k+1}) = K_p \cup K_q$$

ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์

ดังนั้น G ไม่เป็นกราฟ $(k+n+1)$- $factor-critical$ □

จากทฤษฎีบท 2.1.8(7) *G. Liu* และ *Q . Yu*[21] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยง แต่ไม่ได้แสดงว่าค่าจุดเชื่อมโยงเป็นค่าที่คม ต่อไปจะแสดงว่าค่าจุดเชื่อมโยงเป็นค่าที่คม พิจารณากราฟ

$$G = \overline{K}_{n+k+1} \vee (K_p \cup K_q)$$

โดยที่ $p \geq q \geq 2n+k$, $n \geq 1$ และ $p+q+n+k+1 \equiv k(mod 2)$

โดยผลของการแสดงข้างต้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

และขอให้สังเกตว่า G ไม่เป็นกราฟ $(n+k+2)$-จุดเชื่อมโยง

3.2 เงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขเพียงพอของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ในแง่ของกราฟ m*-extendable* โดยที่ค่าของ m ขึ้นกับค่าของ k และ n ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด ในแง่ของผลรวมของดีกรีของจุดที่เป็นอิสระ และในแง่ของค่า *toughness*

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.1 ถ้า G เป็นกราฟ m*-extendable* และ G ไม่เป็นกราฟไบพาร์ไท แล้ว G เป็นกราฟ *strongly* $(k,m\text{-}k)$*-extendable* โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มคู่ ซึ่ง $0 \le k \le m$

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ m*-extendable* และให้ k เป็นจำนวนเต็มคู่ ซึ่ง $0 \le k \le m$

จะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly* $(k, m\text{-}k)$*-extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ $\{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k} w_{m-k}\}$ เป็นการจับคู่ขนาด $m - k$ ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

ให้ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ โดยที่ $|M| = t$

จะเห็นว่า $0 \le t \le \frac{k}{2}$

เราจะได้ $|\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}| - |V(M)| = k - 2t$

ให้ G' เป็นกราฟที่ได้จากกราฟ G โดยการเพิ่มเส้นใน $G[v_1, v_2, \ldots, v_k] - V(M)$ จำนวน $\frac{k}{2} - t$ เส้น โดยที่เซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_1, v_2, \ldots, v_k] - V(M)$ เป็นการจับคู่

ให้ M' เป็นเซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_1, v_2, \ldots, v_k] - V(M)$

เราจะได้ $|M \cup M'| = \frac{k}{2}$

โดยผลของทฤษฎีบท 2.1.4 เราจะได้ว่า G' เป็นกราฟ $(m - (\frac{k}{2} - t))$*-extendable*

เนื่องจาก $m - (\frac{k}{2} - t) \ge m - \frac{k}{2}$ โดยทฤษฎีบท 2.1.1(1) เราจะได้ว่า

G' เป็นกราฟ $(m - \frac{k}{2})$*-extendable* ดังนั้น

$$M \cup M' \cup \{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k} w_{m-k}\}$$

สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G'

นั่นคือ จะมี M'' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G' ซึ่ง

$$M \cup M' \cup \{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k} w_{m-k}\} \subseteq M''$$

เราจะได้ $M'' - (M \cup M')$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

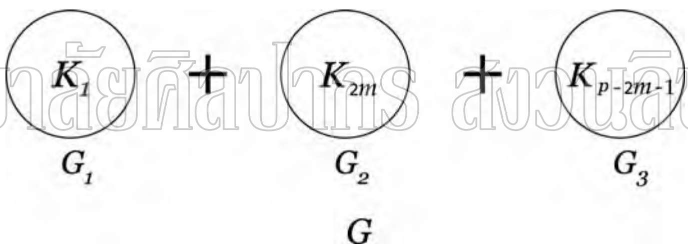
$$G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

ซึ่ง $\{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k} w_{m-k}\} \subseteq M'' - (M \cup M')$

ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly (k,m-k)-extendable* □

ต่อไปเราจะแสดงว่าบทกลับของทฤษฎีบทข้างต้นไม่เป็นจริง โดยจะแสดงว่ามีกราฟ G ที่เป็นกราฟ *strongly (k,m-k)-extendable* โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มคู่ ซึ่ง $2 \leq k \leq m$ แต่ G ไม่เป็นกราฟ *m-extendable*

ให้ $G_1 = K_1$, $G_2 = K_{2m}$ และ $G_3 = K_{p-2m-1}$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็มคู่และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $p \geq 2m+2$ เราจะได้ $G = G_1 \vee G_2 \vee G_3$ เป็นกราฟอันดับ p ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8

โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly (k,m-k)-extendable* แต่ไม่เป็นกราฟ *m-extendable* เนื่องจาก $G - V(M')$ ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ เมื่อ M' เป็นการจับคู่ขนาด m ในกราฟ G_2

ทฤษฎีบท 3.2.2 ถ้า G เป็นกราฟ $m\frac{1}{2}$*-extendable* แล้ว G เป็นกราฟ *strongly (k, m-k+1)-extendable* โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มคี่ ซึ่ง $1 \leq k \leq m-1$

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ $m\frac{1}{2}$*-extendable* และให้ k เป็นจำนวนเต็มคี่ ซึ่ง $1 \leq k \leq m-1$ จะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly (k, m-k+1)-extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และให้ $\{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k+1} w_{m-k+1}\}$ เป็นการจับคู่ขนาด $m-k+1$ ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ $m\frac{1}{2}$*-extendable* เราจะได้ว่า $G - v_k$ เป็นกราฟ *m-extendable*

ให้ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$ โดยที่ $|M| = t$

จะเห็นว่า $0 \le t \le \dfrac{k-1}{2}$

เราจะได้ $|\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}| - |V(M)| = k - 1 - 2t$

ให้ G' เป็นกราฟที่ได้จากกราฟ $G - v_k$ โดยการเพิ่มเส้นใน $G[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}] - V(M)$ จำนวน $\dfrac{k-1}{2} - t$ เส้น โดยที่เซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}] - V(M)$ เป็นการจับคู่

ให้ M' เป็นเซตของเส้นที่เพิ่มในกราฟ $G[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}] - V(M)$

เราจะได้ $|M \cup M'| = \dfrac{k-1}{2}$

โดยผลของทฤษฎีบท 2.1.4 เราจะได้ว่า G' เป็นกราฟ $(m - (\frac{k-1}{2} - t))$ *-extendable*

เนื่องจาก $m - (\dfrac{k-1}{2} - t) \ge m - \dfrac{k-1}{2}$ และโดยผลของทฤษฎีบท 2.1.1(1)

เราจะได้ว่า G' เป็นกราฟ $(m - \frac{k-1}{2})$*-extendable*

ดังนั้น

$$M \cup M' \cup \{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k+1} w_{m-k+1}\}$$

สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G'

นั่นคือ จะมี M'' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $(G - v_k) \cup M'$ ซึ่ง

$$M \cup M' \cup \{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k+1} w_{m-k+1}\} \subseteq M''$$

เราจะได้ $M'' - (M \cup M')$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

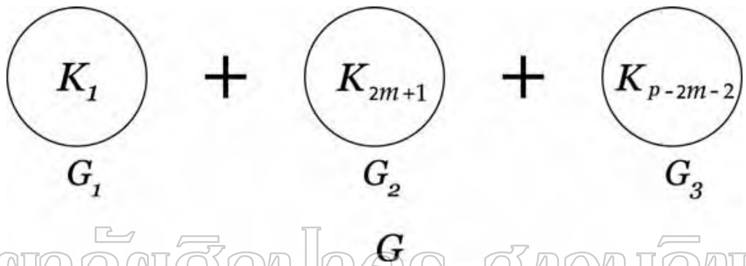
ซึ่ง $\{u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_{m-k+1} w_{m-k+1}\} \subseteq M'' - (M \cup M')$

ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly (k, m-k+1)-extendable* □

ต่อไปเราจะพิจารณาบทกลับของทฤษฎีบทข้างต้น โดยบทนิยามของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* เราจะเห็นได้ชัดว่าบทกลับของทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับกรณีที่ $k = 1$ แต่สำหรับจำนวนเต็มคี่ k ซึ่ง $3 \le k \le m-1$ เราจะแสดงว่าบทกลับของทฤษฎีบทข้างต้นไม่เป็นจริง โดยแสดงว่ามีกราฟ G ที่เป็นกราฟ *strongly* $(k,m-k+1)$-*extendable* โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มคี่ ซึ่ง $3 \le k \le m-1$ แต่ G ไม่เป็นกราฟ $m\frac{1}{2}$-*extendable*

ให้ $G_1 = K_1$, $G_2 = K_{2m+1}$ และ $G_3 = K_{p-2m-2}$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็มคี่และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $p \ge 2m+3$

เราจะได้ $G = G_1 \vee G_2 \vee G_3$ เป็นกราฟอันดับ p ดังรูปที่ 9



รูปที่ 9

โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* $(k,m-k+1)$-*extendable* แต่ไม่เป็นกราฟ $m\frac{1}{2}$-*extendable* เนื่องจาก $G-(\{v\}\cup V(M'))$ ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ เมื่อ v เป็นจุดใน G_2 และ M' เป็นการจับคู่ขนาด m ในกราฟ $G_2 - v$

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ p , k และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $n \ge 1$ และ $p \ge 2n+k+2$ ถ้า G เป็นกราฟอันดับ p โดยที่ $p \equiv k(mod 2)$ และ $\delta(G) \ge \frac{p+k}{2}+n$ แล้ว G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ยิ่งกว่านั้นขอบเขตของ $\delta(G)$ เป็นขอบเขตที่คม

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟซึ่งมีอันดับ p โดยที่ $p \equiv k(mod2)$ และ $\delta(G) \ge \frac{p+k}{2}+n$ จะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ จะเห็นว่า

$$\delta(G-\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) \ge \delta(G)-k \ge \frac{p-k}{2}+n$$

จากทฤษฎีบท 2.1.1(3) เราจะได้ว่า $G-\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ *n-extendable*

ต่อไปจะแสดงว่าขอบเขตของ $\delta(G)$ เป็นขอบเขตที่คม โดยการแสดงว่ามีกราฟ G ซึ่ง $\delta(G) = \frac{p+k}{2}+n-1$ แต่ G ไม่เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

พิจารณากราฟ $G = K_{\frac{p+k}{2}+n-1} + \overline{K}_{\frac{p-k}{2}-n+1}$

เราจะได้ว่ากราฟ G มีอันดับเป็น p และ $\delta(G) = \frac{p+k}{2}+n-1$

เนื่องจาก $\frac{p+k}{2}+n-1 \ge \frac{2n+k+2+k}{2}+n-1 = 2n+k$

ดังนั้นมี $\{x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n\}$ เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $K_{\frac{p+k}{2}+n-1}$ และ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(K_{\frac{p+k}{2}+n-1})$ ซึ่งแต่ละจุดใน $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ไม่ตกกระทบกับเส้น $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n$ เมื่อเรากำจัดจุด $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n\}$ เราจะได้ว่า จุดที่เหลือในกราฟ $K_{\frac{p+k}{2}+n-1}$ มีจำนวน $\frac{p-k}{2}-n-1$ จุด แต่จุดในกราฟ $\overline{K}_{\frac{p-k}{2}-n+1}$ มีจำนวน $\frac{p-k}{2}-n+1$ ซึ่ง $\frac{p-k}{2}-n-1 < \frac{p-k}{2}-n+1$ ทำให้เราได้ว่าจุดในกราฟ $K_{\frac{p+k}{2}+n-1}$ ที่เหลือจำนวนจุด $\frac{p-k}{2}-n-1$ จุดไม่สามารถจับคู่กับจุดในกราฟ $\overline{K}_{\frac{p-k}{2}-n+1}$ ได้ทั้งหมด แสดงว่า G ไม่เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* □

ทฤษฎีบทข้างต้นให้เงื่อนไขเพียงพอในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุดของกราฟ *strongly (k,n)-extendable* สำหรับบทกลับของทฤษฎีบทข้างต้นไม่จริง โดย G. Liu และ Q. Yu[21] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุดของกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ไว้ในทฤษฎีบท 2.1.8(8) ซึ่งท่านได้แสดงว่าถ้า G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ที่มีอันดับ p แล้ว $n+k+1 \le \delta(G) \le \frac{p+k}{2}$ หรือ $\delta(G) \ge 2n+k+1$ ซึ่งในบทที่ 4 จะแสดงว่ามีกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ที่มีดีกรีที่น้อยที่สุดในช่วงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ k, n, q และ p เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $p \equiv k(mod 2)$ และให้ G เป็นกราฟ q จุดเชื่อมโยงที่มีอันดับ p ซึ่ง $q \geq 2n + k - 1$ และ $p \geq 2n + k + 2$ ถ้ามี t ซึ่ง $1 \leq t \leq q - k - 2n + 2$ และทุกๆ เซตของจุดที่เป็นอิสระ $I = \{w_1, \ldots, w_t\}$ สอดคล้องกับ

$$\sum_{i=1}^{t} d(w_i) \;\; \geq \;\; t(\frac{p+k}{2} + n - 1) + 1$$

แล้ว G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ยิ่งไปกว่านั้นค่า $\sum_{i=1}^{t} d(w_i)$ เป็นค่าที่คม

พิสูจน์ สมมติ G ไม่เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

ดังนั้นมี $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ

$$G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

ซึ่ง M ไม่สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

นั่นคือ $G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$ ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์

ให้

$$G' = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.1 จะมี $S \subseteq V(G')$ ซึ่ง $o(G' - S) > |S|$

เนื่องจาก $p \equiv k(mod 2)$ และ $|V(M)|$ เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า G' เป็นกราฟอันดับคู่

ซึ่งทำให้ $o(G' - S) \equiv |S|(mod 2)$ ดังนั้น $o(G' - S) \neq |S| + 1$

เพราะว่า $o(G' - S) > |S|$ เพราะฉะนั้น $o(G' - S) \geq |S| + 2$

ให้ $m = |S| + 2$ และ $r = o(G' - S)$ จะเห็นว่า $m \leq r$

และให้ $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots, C_r$ เป็นคอมโพแนนท์คี่ของกราฟ $G' - S$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ q จุดเชื่อมโยง เราจะได้ $|S \cup V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}| \geq q$

เราจะเห็นว่า $t \;\leq\; q - k - 2n + 2 \;\leq\; 2n + k + |S| - k - 2n + 2 \;=\; |S| + 2 \;=\; m$

ให้ $u_i \in V(C_i)$ โดยที่ $i = 1,2,\ldots,t$ เราจะได้ว่า $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ

ดังนั้น
$$\sum_{i=1}^{t} d_G(u_i) \;\; \leq \;\; \sum_{l=1}^{t} (2n + k + |S| + |V(C_i)| - 1)$$

$$= (2n+k+|S|-1)t+\sum_{i=1}^{t}|V(C_i)|$$

$$\leq 2nt+kt+|S|t-t+(p-2n-k-|S|-\sum_{i=t+1}^{r}|V(C_i)|)$$

$$\leq 2nt+kt+|S|t-t+(p-2n-k-|S|-(r-t))$$

$$\leq 2nt+kt+|S|t-t+(p-2n-k-|S|-(m-t))$$

$$= 2nt+kt+|S|t-t+p-2n-k-|S|-|S|-2+t$$

$$= 2nt+kt+|S|t+p-2n-k-2|S|-2$$

$$= |S|(t-2)+2nt+kt+p-2n-k-2$$

เนื่องจาก $|S| \leq p-2n-k-\sum_{i=1}^{r}|V(C_i)|$

$$\leq p-2n-k-m$$

$$= p-2n-k-|S|-2$$

เราจะได้ $|S| \leq \frac{p-2n-k-2}{2}$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{t} d_G(u_i) \leq \frac{p-2n-k-2}{2}(t-2)+2nt+kt+p-2n-k-2$

$$= t(\frac{p-2n-k-2}{2})-p+2n+k+2+2nt+kt+p-2n-k-2$$

$$= t(\frac{p-2n-k-2}{2}+2n+k)$$

$$= t(\frac{p+k}{2}+n-1)$$

เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ต่อไปจะแสดงว่าค่า $\sum_{i=1}^{t} d(w_i)$ เป็นค่าที่คม นั่นคือจะแสดงว่ามีกราฟ G อันดับ p ที่มีค่า $\sum_{i=1}^{t} d(w_i)$ เท่ากับ $t(\frac{p+k}{2}+n-1)$ โดยที่ $\{w_1,\ldots,w_t\}$ เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ แต่ G ไม่เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

พิจารณากราฟ $G = K_{2n+k+t-1} \vee \overline{K}_{t+1}$ โดยที่ k, n, t เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ซึ่ง $t \geq 1$ เราจะเห็นว่า G เป็นกราฟ $2n+k+t-1$ จุดเชื่อมโยงที่มีอันดับ $p = 2n+k+2t$ ซึ่ง จุดเชื่อมโยง $2n+k+t-1 > k+2n-1$ และ $p \geq 2n+k+2$ โดยที่ $p \equiv k(mod 2)$

ให้ T เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ โดยที่ $T = \{w_1,\ldots,w_t\}$

ถ้า $|T| = 1$ แล้ว $w_1 \in V(K_{2n+k+t-1})$ หรือ $w_1 \in V(\overline{K}_{t+1})$

จะเห็นว่า $d(w_1) \geq 2n+k+t-1 = \frac{p+k}{2}+n-1$

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ $|T| \geq 2$ เห็นได้ชัดว่า $T \subseteq V(\overline{K}_{t+1})$

เพราะฉะนั้น $t < (2n+k+t-1)-k-2n+2$

เห็นได้ชัดว่า $d(w_i) = 2n+k+t-1$ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, t$

เนื่องจาก $p = 2n+k+2t$ เราจะได้ $p+2n+k = 4n+2k+2t$

ทำให้เราได้ว่า $\frac{p+k}{2}+n-1 = 2n+k+t-1$

ดังนั้น $d(w_i) = 2n+k+t-1 = \frac{p+k}{2}+n-1$ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, t$

ทำให้เราได้ $\sum_{i=1}^{t} d(w_i) = t(\frac{p+k}{2}+n-1)$

ต่อไปจะแสดงว่า $G = K_{2n+k+t-1} \vee \overline{K}_{t+1}$ ไม่เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

ให้ $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\} \subseteq V(K_{2n+k+t-1})$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $K_{2n+k+t-1} - \{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$

เราจะได้ว่าจุดที่เหลือในกราฟ $K_{2n+k+t-1} - (V(M) \cup \{v_1,v_2,\ldots,v_k\})$ มีจำนวน $t-1$ จุด แต่จุดในกราฟ $\overline{K}_{t+1}$ มีจำนวน $t+1$

ทำให้เราได้ว่าจุดในกราฟ $K_{2n+k+t-1} - (V(M) \cup \{v_1,v_2,\ldots,v_k\})$ ที่เหลือจำนวนจุด $t-1$ จุด ไม่สามารถจับคู่กับจุดในกราฟ $\overline{K}_{t+1}$ ทั้งหมดได้ แสดงว่า G ไม่เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ดังนั้น ค่า $\sum_{i=1}^{t} d(w_i)$ เป็นค่าที่คม □

ทฤษฎีบท 3.2.5 ให้ G เป็นกราฟอันดับ p ถ้า $tough(G) > \frac{k+2n}{2}$ โดยที่ k, n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ซึ่ง $2 \leq k \leq p-2n-2$, $0 \leq n \leq \frac{p-k-2}{2}$ และ $p \equiv k(mod\,2)$ แล้ว G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* และค่า *toughness* ของกราฟ G เป็นค่าที่คม

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟอันดับ p และ $tough(G) > \frac{k+2n}{2}$ โดยที่ k, n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $2 \leq k \leq p-2n-2$, $0 \leq n \leq \frac{p-k-2}{2}$ และ $p \equiv k(mod\,2)$

สมมติ G ไม่เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*

เราจะได้ว่ามี $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ที่ทำให้กราฟ $G - (V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$ ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ ให้

$$G' = G - (V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.1 จะมี $S \subseteq V(G')$ ซึ่ง $o(G' - S) > |S|$

เนื่องจาก $p \equiv k(mod\,2)$ และ $|V(M)|$ เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า G' เป็นกราฟอันดับคู่ ซึ่งทำให้ $o(G' - S) \equiv |S|(mod\,2)$ ดังนั้น $o(G' - S) \neq |S| + 1$ เพราะว่า $o(G' - S) > |S|$ เพราะฉะนั้น $o(G' - S) \geq |S| + 2 \geq 2$ และจะเห็นว่า

$$o(G - (S \cup V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})) = o(G' - S) \geq 2$$

เราจะได้ $S \cup V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นเซตของจุดตัดของกราฟ G ดังนั้น

$$tough(G) \leq \frac{|S \cup V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}|}{o(S \cup V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})}$$

$$\leq \frac{|S| + k + 2n}{|S| + 2}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $$\frac{|S| + k + 2n}{|S| + 2} \leq \frac{k + 2n}{2}$$

พิจารณา $$\frac{k + 2n}{2} - \frac{|S| + k + 2n}{|S| + 2}$$

จะเห็นว่า
$$\frac{k + 2n}{2} - \frac{|S| + k + 2n}{|S| + 2} = \frac{(k + 2n)(|S| + 2)}{2(|S| + 2)} - \frac{2(|S| + k + 2n)}{2(|S| + 2)}$$

$$= \frac{(k + 2n - 2)|S|}{2(|S| + 2)}$$

เนื่องจาก $k \geq 2$, $n \geq 0$ และ $|S| \geq 0$ เราจะได้ว่า $\frac{(k + 2n - 2)|S|}{2(|S| + 2)} \geq 0$

ดังนั้น $$\frac{|S| + k + 2n}{|S| + 2} \leq \frac{k + 2n}{2}$$

ทำให้เราได้ว่า $tough(G) \le \frac{k+2n}{2}$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ต่อไปจะแสดงว่าค่า *toughness* เป็นค่าที่คม

นั่นคือจะแสดงว่ามีกราฟอันดับ p ที่มีค่า *toughness* เท่ากับ $\frac{k+2n}{2}$ แต่ไม่เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* โดยที่ $2 \le k \le p-2n-2$, $0 \le n \le \frac{p-k-2}{2}$

ให้ p, q, k และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ซึ่ง $2 \le k \le p-2n-2$, $0 \le n \le \frac{p-k-2}{2}$ และ $p \equiv k (mod 2)$

พิจารณากราฟ $G = K_{k+2n} \vee 2K_{2q+1}$

เราจะเห็นว่า $tough(G) = \frac{k+2n}{2}$

ต่อไปจะแสดงว่า G ไม่เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(K_{k+2n})$

และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $K_{k+2n} - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เราจะได้

$$G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = 2K_{2q+1}$$

ทำให้เราได้ว่า $G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$ ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์

ดังนั้น G ไม่เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* □

3.3 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ในทฤษฎีบท 2.1.7 *G. Liu* และ *Q. Yu* [21] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ (k,n,d) ในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์คี่ ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ในแง่ของจำนวนของคอมโพแนนท์คี่เช่นกันแต่แตกต่างจากทฤษฎีบท 2.1.7 จากนั้นจะศึกษาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ $G - V(M)$ เมื่อ M เป็นการจับคู่ของกราฟ G ที่เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* และ เงื่อนไขเพียงพอและจำเป็นของกราฟ $G + \bar{K}_k$ เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของกราฟ *strongly* $(k,1)$*-extendable* ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3.1 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอนอันดับ p และ k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์โดยที่ $p \equiv k(mod 2)$ จะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* $(k,1)$-*extendable* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $S \subseteq V(G)$

(1) $o(G\text{-}S) \le |S| - k$ โดยที่ $|S| \ge k$ และ

(2) ถ้า $o(G\text{-}S) = |S| - k$ และ $|S| \ge k + 2$ แล้ว S เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly* $(k,1)$-*extendable* เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *k-factor–critical* โดยผลของทฤษฎีบท 2.1.6 เราจะได้ $o(G - S) \le |S| - k$ สำหรับทุกๆ $S \subseteq V(G)$ และ $|S| \ge k$ ทำให้เราได้ว่าข้อความ (1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่าถ้า $o(G\text{-}S) = |S| - k$ และ $|S| \ge k + 2$ แล้ว S เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ

สมมติมี $S \subseteq V(G)$ ซึ่ง $o(G - S) = |S| - k$ และ $|S| \ge k + 2$ แต่ S ไม่เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ

ให้ $e = xy \in E(G[S])$ และ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq S - \{x,y\}$

ให้

$$G' = G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

และ

$$S' = S - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

จะเห็นว่า $e = xy \in E(G[S'])$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* $(k,1)$-*extendable* เราจะได้ G' เป็นกราฟ 1–*extendable* เพราะว่า

$$o(G' - S') = o(G - S) = |S| - k = |S'|$$

จากทฤษฎีบท 2.2.1 เราจะได้ S' เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ว่า $e \in E(G[S'])$ ดังนั้นข้อความ (2) เป็นจริง

ต่อไปเราจะพิสูจน์บทกลับ

สมมติว่ามี $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ไม่เป็นกราฟ 1–*extendable* เราจะได้ว่ามี

$$e \in E(G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

ซึ่ง e ไม่สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ใน $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เนื่องจาก $o(G\text{-}S) \leq |S| - k$ ซึ่ง $|S| \geq k$ โดยทฤษฎีบท 2.1.6 เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *k- factor – critical*

ดังนั้น $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ มีการจับคู่สมบูรณ์ แต่เนื่องจาก $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ไม่เป็นกราฟ 1–*extendable* โดยทฤษฎีบท 1.2.1 ทำให้ได้ว่าข้อความ (1) ในทฤษฎีบท 2.2.1 เป็นจริง สำหรับกราฟ

$$G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

ดังนั้นข้อความ (2) ในทฤษฎีบท 2.2.1 ต้องเป็นเท็จ สำหรับกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ นั่นคือ มี

$$S'' \subseteq V(G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

ซึ่ง

$$o(G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup S'')) = |S''|$$

และ S'' ไม่เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ

ดังนั้น $|S''| \geq 2$

ให้ $S''' = S'' \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เห็นได้ชัดว่า $|S'''| \geq k + 2$ ยิ่งไปกว่านั้น

$$o(G - S''') = o(G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup S'')) = |S''| = |S'''| - k$$

แต่ $|S'''|$ เป็นเซตของจุดที่ไม่เป็นอิสระ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับข้อความ (2) ของสมมติฐานของทฤษฎีบท ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly* $(k,1)$-*extendable* □

ทฤษฎีบท 3.3.2 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอนอันดับ p และ k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $p \equiv k (mod 2)$ จะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* อันดับ p ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $S \subseteq V(G)$

(1) $o(G\text{-}S) \leq |S| - k$ โดยที่ $|S| \geq k$ และ

(2) ถ้า $o(G\text{-}S) = |S| - 2t - k$ โดยที่ $0 \leq t \leq n - 1$ และ $|S| \geq 2(t + 1) + k$ สำหรับ $S \subseteq V(G)$ แล้ว $F(S) \leq t$ เมื่อ $F(S)$ เป็นขนาดของการจับคู่ใหญ่สุด ใน $G[S]$

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* และให้ $S \subseteq V(G)$ โดยที่ $|S| \geq k$ จะแสดงข้อความ (1) และ (2) เป็นจริงโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ บน n

จากทฤษฎีบท 3.3.1 เราจะได้ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง เมื่อ $n = 1$

ต่อไปสมมติข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง สำหรับ $n < r$ พิจารณากรณี $n = r$ สมมติ G เป็นกราฟ *strongly (k,r)-extendable* เราจะได้ G เป็นกราฟ *k- factor – critical* โดยทฤษฎีบท 2.1.6 เราจะได้ $o(G\text{-}S) \leq |S| - k$ สำหรับ $S \subseteq V(G)$ และ $|S| \geq k$ นั่นคือข้อความ (1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงข้อความ (2) เป็นจริงสำหรับกรณี $n = r$ จากสมมติฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะได้ข้อความ (2) เป็นจริง สำหรับกรณี $0 \leq t \leq r\text{-}2$

พิจารณากรณี $t = r - 1$

สมมติมี $S' \subseteq V(G)$ ซึ่ง $o(G\text{-}S') = |S'| - 2(r-1) - k$ และ $|S'| \geq 2r + k$ แต่ $F(S') \geq r$ ให้ M เป็นการจับคู่ขนาด r ในกราฟ $G[S']$ และ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq S' - V(M)$ ให้

$$G' = G - (V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

และ

$$S'' = S' - (V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

ดังนั้น

$$o(G'\text{-}S'') = o(G\text{-}S') = |S'| - 2r + 2 - k = |S''| + 2 > |S''|$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.1 เราจะได้ว่า G' ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ G เป็นกราฟ *strongly (k,r)-extendable*

ดังนั้นข้อความ (2) เป็นจริง

ต่อไปเราจะพิสูจน์บทกลับ ให้ $S \subseteq V(G)$ และข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง จะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน n โดยทฤษฎีบท 3.3.1 เราจะได้ G เป็นกราฟ *strongly (k,1)-extendable* เมื่อ $n = 1$ สมมติ G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* เมื่อ $n < r$

ต่อไปจะพิจารณากรณี $n = r$

สมมติ G ไม่เป็นกราฟ *strongly (k,r)-extendable*

ดังนั้นจะมี $S' \subseteq V(G)$ ซึ่ง $|S'| = k$ ที่ทำให้กราฟ $G - S'$ ไม่เป็นกราฟ *r–extendable* จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2.2 จะมี M เป็นการจับคู่ขนาด r - 1 ซึ่ง

$$G' = G - (S' \cup V(M))$$

ไม่เป็นกราฟ 1-*extendable*

จากสมมติฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* $(k,r-1)$-*extendable*

ทำให้เราได้ว่า G' มีการจับคู่สมบูรณ์

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 1.2.1 เราจะได้ $o(G'-S) \leq |S|$ สำหรับแต่ละ $S \subset V(G')$

เนื่องจาก G' ไม่เป็นกราฟ 1-*extendable* โดยทฤษฎีบท 2.2.1 จะมี $S'' \subseteq V(G')$ ซึ่ง $o(G'-S'') = |S''|$ และ S'' ไม่เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ

ให้

$$S''' = S'' \cup (S' \cup V(M))$$

จะเห็นว่า

$$|S'''| = |S''| + 2(r-1) + k \geq 2 + 2(r-1) + k = 2r + k = 2((r-1)-1) + k$$

และ

$$o(G-S''') = o(G'-S'') = |S''| = |S'''| - 2(r-1) - k$$

แต่ $F(S''') \geq F(S'') + (r-1) \geq r > r-1$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับข้อความ (2) จากสมมติฐาน

ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* □

ทฤษฎีบท 3.3.3 G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ M ที่เป็นการจับคู่ใน G ซึ่ง M มีขนาดเท่ากับ i โดยที่ $1 \leq i \leq n$ แล้ว กราฟ $G - V(M)$ เป็นกราฟ *strongly* $(k,n-i)$- *extendable*

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* และ M เป็นการจับคู่ใน G ซึ่ง M มีขนาดเท่ากับ i โดยที่ $1 \leq i \leq n$ และ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G - V(M))$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

เราจะได้ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ n-*extendable*

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2.2 เราจะได้

$$G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เป็นกราฟ $(n-i)$-*extendable*

ดังนั้น $G - V(M)$ เป็นกราฟ *strongly* $(k,n-i)$-*extendable*

ต่อไปจะพิสูจน์บทกลับ ให้ $G - V(M)$ เป็นกราฟ *strongly* $(k,n\text{-}i)$*-extendable* โดยที่ M เป็นการจับคู่ขนาด i ซึ่ง $1 \le i \le n$

เราจะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ M' เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เราจะได้ $G - V(M')$ เป็นกราฟ *strongly* $(k,0)$*-extendable*

ดังนั้น

$$(G - V(M')) - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

มีการจับคู่สมบูรณ์

ให้ M'' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $(G - V(M')) - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เราจะได้ $M'' \cup M'$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ซึ่ง $M' \subseteq M'' \cup M'$

ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* □

ทฤษฎีบท 3.3.4 G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* ก็ต่อเมื่อ $G + \bar{K}_k$ เป็นกราฟ $(n+k)$*–extendable*

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ให้ $H = G + \bar{K}_k$

จะแสดงว่า H เป็นกราฟ $(n+k)$*–extendable*

ให้ M เป็นการจับคู่ขนาด $n + k$ ในกราฟ H โดยที่

$$M = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_{n+k} y_{n+k}\}$$

กรณีที่ 1 $M \subseteq E(G)$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ดังนั้นมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}\}$$

ซึ่ง $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n\} \subseteq M'$

ให้ $\{w_1 y_{n+1}, w_2 y_{n+2}, \ldots, w_k y_{n+k}\} \subseteq M'$ และ

$M'' = (M' - \{w_1 y_{n+1}, w_2 y_{n+2}, \dots, w_k y_{n+k}\}) \cup \{x_{n+1} y_{n+1}, \dots, x_{n+k} y_{n+k}, w_1 z_1, \dots, w_k z_k\}$

โดยที่ $z_1, z_2, \dots, z_k$ เป็นจุดในกราฟ $\bar{K}_k$

จะเห็นว่า M'' เป็นการจับคู่ในกราฟ H ซึ่ง $M \subseteq M''$

ดังนั้น H เป็นกราฟ $(n+k)$–*extendable*

กรณีที่ 2 $M \not\subseteq E(G)$

เราจะได้ว่ามีเส้นใน M บางเส้นที่ตกกระทบกับจุดในกราฟ $\bar{K}_k$

โดยไม่เสียหลักการสำคัญสมมติให้ $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_j y_j$ โดยที่ $1 \le j \le k$ เป็นเส้นทั้งหมดที่ตกกระทบกับจุดในกราฟ $\bar{K}_k$ และ $y_1, y_2, \dots, y_j$ เป็นจุดในกราฟ $\bar{K}_k$ ดังนั้น $x_1, x_2, \dots, x_j$ เป็นจุดในกราฟ G

เราได้ว่า $\{x_{j+1} y_{j+1}, x_{j+2} y_{j+2}, \dots, x_{n+k} y_{n+k}\} \subseteq E(G)$

ดังนั้นจะได้ว่ามีจำนวนจุดในกราฟ $\bar{K}_k$ ที่ไม่ตกกระทบกับเส้นใน M จำนวน $k-j$ จุด

สมมติ $\{z_1, z_2, \dots, z_{k-j}\}$ เป็นเซตของจุดในกราฟ $\bar{K}_k$ ที่ไม่ตกกระทบกับเส้นใน M

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

เราจะได้

$$G - \{x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k\}$$

เป็นกราฟ n-*extendable*

ดังนั้นมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - \{x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k\}$

ซึ่ง $$\{x_{k+1} y_{k+1}, x_{k+2} y_{k+2}, \dots, x_{k+n} y_{k+n}\} \subseteq M'$$

ให้ $$\{w_1 y_{j+1}, w_2 y_{j+2}, \dots, w_{k-j} y_k\} \subseteq M'$$

เราจะได้

$M'' = [M' - \{w_1 y_{j+1}, w_2 y_{j+2}, \dots, w_{k-j} y_k\}] \cup \{x_1 y_1, \dots, x_j y_j, x_{j+1} y_{j+1}, \dots, x_k y_k, w_1 z_1, \dots, w_{k-j} z_{k-j}\}$

เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ H ซึ่ง $M \subseteq M''$ ดังนั้น H เป็นกราฟ $(n+k)$–*extendable*

ต่อไปจะพิสูจน์บทกลับ ให้ $G + \bar{K}_k$ เป็นกราฟ $(n+k)$ – *extendable* โดยที่ $V(\bar{K}_k) = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ จะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n\} \subseteq E(G - \{v_1, v_2, \dots, v_k\})$

เนื่องจาก $G + \bar{K}_k$ เป็นกราฟ $(n+k)$–*extendable* ดังนั้นจะมี M เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G + \bar{K}_k$ ซึ่ง $\{x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, z_1v_1, z_2v_2, \ldots, z_kv_k\} \subseteq M$
เราจะได้ว่า $M - \{z_1v_1, z_2v_2, \ldots, z_kv_k\}$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ซึ่ง $\{x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n\} \subseteq M - \{z_1v_1, z_2v_2, \ldots, z_kv_k\}$
ดังนั้น G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* □

บทที่ 4

คุณสมบัติของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

ในบทนี้เราจะศึกษาคุณสมบัติของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด โดยแสดงว่าเมื่อกำหนด p , k , n และ r ที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $p \geq 2n+k+2$ และ $p \equiv k(mod\ 2)$ จะมีกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดเท่ากับ r โดยที่ $n+k+1 \leq r \leq \frac{p+k}{2}$ หรือ $2n+k+1 \leq r \leq p-1$ และศึกษาลักษณะของเส้นในกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* เมื่อเพิ่มเส้นหรือกำจัดเส้น 2 เส้น แล้วทำให้กราฟที่ได้จะมีผลกระทบเหมือนกับการเพิ่มเส้นหรือกำจัดเส้น 1 เส้นในกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ตามลำดับ

4.1 คุณสมบัติของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด

G. Liu และ *Q. Yu* [21] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุดไว้ในทฤษฎีบท 2.1.8(8) ในหัวข้อนี้เราจะแสดงว่าเมื่อกำหนด p , k , n และ r ที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $p \geq 2n+k+2$ และ $p \equiv k(mod\ 2)$ จะมีกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดเท่ากับ r โดยที่ $n+k+1 \leq r \leq \frac{p+k}{2}$ หรือ $2n+k+1 \leq r \leq p-1$ โดยเริ่มจากการศึกษาขนาดการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[N(u)]$ เมื่อ u เป็นจุดของกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* ที่มีดีกรีเท่ากับ $n+k+t$ โดยที่ $1 \leq t \leq n$

ทฤษฎีบท 4.1.1 ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* อันดับ p โดยที่ $p \geq 2n+k+2$ ถ้า $u \in V(G)$ ซึ่ง $d_G(u) = n+k+t$ โดยที่ $1 \leq t \leq n$ แล้วขนาดของการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[N_G(u)]$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $t-1$

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* อันดับ p ซึ่ง $p \geq 2n+k+2$ และให้ $u \in V(G)$ ซึ่ง $d_G(u) = n+k+t$ โดยที่ $1 \leq t \leq n$

จะได้ว่า $|N_G(u)| = n+k+t$ ขอให้สังเกตว่า

$$r = |\overline{N}_G(u)| = p-n-k-t-1 \geq 2n+k+2-n-k-t-1 = n-t+1 \geq 1$$

สมมติ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[N_G(u)]$ ซึ่ง $|M| = s \geq t$

ตอนแรกจะแสดงว่า $|M| = s \leq n-1$

สมมติ $|M| \geq n$

ให้ $M' \subseteq M$ โดยที่ $|M'| = n$

จะได้

$$|N_G(u) - V(M')| = n+k+t-2n = k+t-n \leq k$$

และ

$$|\overline{N}_G(u)| \geq n-t+1 > n-t$$

ให้

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+t-n}\} = N_G(u) - V(M')$$

และให้

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-t}\} \subseteq \overline{N}_G(u)$$

เราจะเห็นว่า

$$|\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+t-n}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-t}\}| = k$$

และ

$$G_1 = G - (V(M') \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_{k+t-n}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-t}\})$$

มีจุด u เป็นจุดเอกเทศ แสดงว่า G_1 ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับการที่ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ดังนั้น $|M| = s \leq n-1$

ต่อไปจะแสดงว่า $|N_G(u) - V(M)| \geq k+1$

สมมติ $|N_G(u) - V(M)| < k+1$

และให้

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_{n+k+t-2s}\} = N_G(u) - V(M)$$

เนื่องจาก $|N_G(u) - V(M)| < k+1$ จะได้ว่า $|\{u_1, u_2, \ldots, u_{n+k+t-2s}\}| < k+1$

เนื่องจาก $s < n$ เราจะได้ $2s - n < n + 1$ ดังนั้น $2s - n - t < n - t + 1$

ทำให้เราได้ว่า

$$|\overline{N}_G(u)| = p - n - k - t - 1 \geq n - t + 1 > 2s - n - t$$

ให้

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{2s-n-t}\} \subseteq \overline{N}_G(u)$$

จะได้ว่า

$$G_2 = G - [(V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_{2s-n-t}, u_1, u_2, \ldots, u_{n+k+t-2s}\}]$$

มี u เป็นจุดเอกเทศ แสดงว่า G_2 ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ ซึ่งเกิดข้อข้อแย้งกับการที่ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ดังนั้น $|N_G(u) - V(M)| \geq k+1$

ต่อไปจะแสดงว่า $r = |\overline{N}_G(u)| \geq k$

สมมติ $r < k$

ให้ $\overline{N}_G(u) = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$

และให้

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-r}\} \subseteq N_G(u) - V(M)$$

จะได้

$$\begin{aligned} \nu(G - [(V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_{k-r}\}]) &= p - 2s - k \\ &\geq p - 2(n-1) - k \\ &\geq 2n + k + 2 - 2n + 2 - k \\ &= 4 \end{aligned}$$

ทำให้เราได้ว่า $G_3 = G - (V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_{k-r}\}) = K_1 \vee \overline{K_q}$

โดยที่ $q \geq 3$ เห็นได้ชัดว่า G_3 ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับการที่ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ดังนั้น $|\overline{N}_G(u)| \geq k$

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq \overline{N}_G(u)$ และให้ $G' = G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* ดังนั้น G' เป็นกราฟ *n-extendable*
ขอให้สังเกตว่า $N_G(u) = N_{G'}(u)$ และ $G[N_G(u)] = G[N_{G'}(u)]$
ให้ F เป็นการจับคู่สมบูรณ์ใน G' ซึ่ง $M \subseteq F$ และให้ $v \in N_G(u) - V(M)$ โดยที่ $uv \in F$
ให้

$$F_1 = \{ab \in F \mid a \in N_G(u) - (V(M) \cup \{v\}),\ b \in \overline{N}_G(u)\}$$

เนื่องจาก $|N_G(u) - V(M)| \geq k+1$
จะได้

$$|F_1| = n + k + t - 2|M| - 1 \geq k$$

ให้ $F_2 \subseteq F_1$ โดยที่ $|F_2| = k - 1$ และให้ $F_3 = M \cup (F_1 - F_2)$
เนื่องจาก $|M| \geq t$
จะเห็นว่า

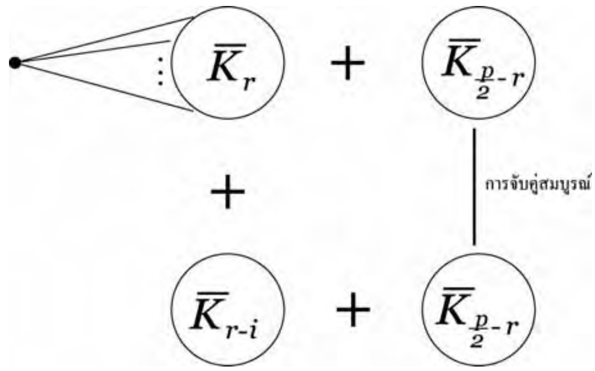
$$|F_3| = |M| + |F_1| - |F_2| = |M| + (n + k + t - 2|M| - 1) - (k - 1) = n + t - |M| \leq n$$

แต่กราฟ

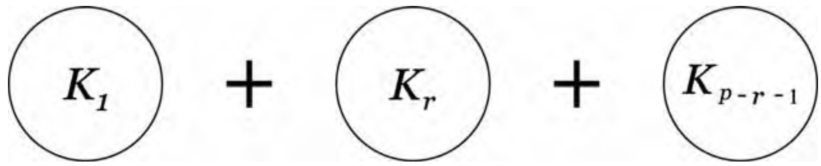
$$G'' = G - [V(F_3) \cup \{v\} \cup (V(F_2) \cap N_G(u))]$$

มี u เป็นจุดเอกเทศ แสดงว่า G'' ไม่มีการจับคู่สมบูรณ์ เกิดข้อข้อแย้งกับการที่ G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable*
ดังนั้น ขนาดของการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[N_G(u)]$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $t - 1$ □

N. Ananchuen และ *L. Caccetta* [4] ได้แสดงว่าสำหรับแต่ละ p, n และ r ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $p \geq 2n + 2$ จะมีกราฟ *n-extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดเท่ากับ r โดยที่ $n + 1 \leq r \leq \frac{p}{2}$ หรือ $2n + 1 \leq r \leq p - 1$ ซึ่งกราฟดังกล่าวแสดงในรูปที่ 10 และรูปที่ 11



รูปที่ 10



รูปที่ 11

นั่นคือ N. Ananchuen และ L. Caccetta[4] ได้แสดงว่ามีกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดเท่ากับ r โดยที่ $n+k+1 \le r \le \frac{p+k}{2}$ หรือ $2n+k+1 \le r \le p-1$ ในกรณีที่ $k = 0$ เมื่อกำหนด p, n และ r ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $p \ge 2n+2$

ต่อไปเราจะแสดงว่ามีกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดเท่ากับ r โดยที่ $n+k+1 \le r \le \frac{p+k}{2}$ หรือ $2n+k+1 \le r \le p-1$ ในกรณีที่ $k \ge 1$ เมื่อกำหนด p, n, k และ r ที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เราจะเริ่มด้วยการศึกษาอันดับของกราฟ G เมื่อ $n+k+1 \le \delta(G) \le 2n+k$

ทฤษฎีบท 4.1.2 ให้ G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p โดยที่ $n \ge 1$ และ $k \ge 1$ ถ้า $n+k+1 \le \delta(G) \le 2n+k$ แล้ว $p \ge 4n+3k+2$

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p โดยที่ $n \ge 1$, $k \ge 1$ และ $n+k+1 \le \delta(G) \le 2n+k$ จะแสดงว่า $p \ge 4n+3k+2$

ให้ $u \in V(G)$ ซึ่ง $d(u) = \delta(G) = n+k+t$ โดยที่ $1 \le t \le n$

ให้ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[N_G(u)]$ และให้ $s = |M|$

จากทฤษฎีบท 4.1.1 จะเห็นว่า $|M| = s \le t-1 \le n-1$

ให้ $A = N_G(u) - V(M)$ เห็นได้ชัดว่า A เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระในกราฟ G และ

$$|A| = n+k+t-2s \ge n+k+t-2t+2 = n+k-t+2 \ge n+k-n+2 = k+2$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $|\overline{N}_G(u)| \ge k+1$ โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีตามค่าของ k

กรณีที่ 1 k เป็นจำนวนคู่

โดยทฤษฎีบท 2.1.8(2) เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* $(0,n)$-*extendable*

ดังนั้น M สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G

ทำให้เราได้ว่า

$$|\overline{N}_G(u)| \ge |A| - 1 \ge k+1$$

กรณีที่ 2 k เป็นจำนวนคี่

โดยทฤษฎีบท 2.1.8(2) เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* $(1,n)$-*extendable*

ดังนั้น M สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G-u$

ทำให้เราได้ว่า

$$|\overline{N}_G(u)| \ge |A| \ge k+2$$

จากทั้ง 2 กรณีข้างต้นจะเห็นว่า $|\overline{N}_G(u)| \ge k+1$

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq \overline{N}_G(u)$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

เราจะได้ว่ากราฟ

$$G - (V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

มีการจับคู่สมบูรณ์

เพราะว่า A เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระในกราฟ $G - (V(M) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$

เราจะได้

$$|\overline{N}_G(u) - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}| \ge |A| - 1$$

ดังนั้น $|\overline{N}_G(u)| \geq |A| + k - 1$

ให้ $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq A$

เนื่องจากกราฟ $G - (V(M) \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_k\})$ มีการจับคู่สมบูรณ์ และ

$$|\overline{N}_G(u)| - (|A| - k - 1) \geq |A| + k - 1 - |A| + k + 1 \geq 2$$

ดังนั้น $G[\overline{N}_G(u)]$ มีการจับคู่

ให้ M' เป็นการจับคู่ใหญ่สุดของกราฟ $G[\overline{N}_G(u)]$

ต่อไปจะแสดงว่า $|M'| \geq n+1$

สมมติ $|M'| \leq n$

ให้ $B = \overline{N}_G(u) - V(M')$ เห็นได้ชัดว่า B เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระในกราฟ G

ต่อไปจะพิจารณา $|N_G(u)| - |V(M) \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}|$ โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ตามค่าของ k

กรณีที่ 1 k เป็นจำนวนคู่

โดยทฤษฎีบท 2.1.8(2) เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* (0,n)-*extendable*

ดังนั้น M' สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ F ในกราฟ G

เนื่องจาก B เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระในกราฟ G แสดงว่า F จะต้องจับคู่จุดแต่ละจุดใน B กับจุดใน $N_G(u)$ และ F จะต้องจับคู่จุด u กับจุดใน $N_G(u)$ เช่นกัน เพราะว่า M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดใน $N_G(u)$ ดังนั้น $|B| \geq |A| - 1$

และเนื่องจาก $G - (V(M) \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_k\})$ มี F_1 เป็นการจับคู่สมบูรณ์และ A เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระในกราฟ G แสดงว่า F_1 จะต้องจับคู่จุดแต่ละจุดใน $A - \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ จำนวน $|A| - k - 1$ ไปยังจุดใน $\overline{N}_G(u)$ เพราะว่า M' เป็นการจับคู่ใหญ่สุดใน $G[\overline{N}_G(u)]$ จะได้ว่า $|A| - k - 1 \geq |B|$ ดังนั้น $|A| - k - 1 \geq |B| \geq |A| - 1$ แสดงว่า $k = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $k \geq 2$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 k เป็นจำนวนคี่

โดยทฤษฎีบท 2.1.8(2) เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* (1,n)-*extendable*

ดังนั้น M' สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G-u$

เนื่องจาก B เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระในกราฟ G แสดงว่า F จะต้องจับคู่จุดแต่ละจุดใน B กับจุดใน $N_G(u)$ เพราะว่า M เป็นการจับคู่ใหญ่สุดใน $N_G(u)$ เราจะได้ $|B| \geq |A|$ และเนื่องจาก $G-(V(M) \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_k\})$ มี F_1 เป็นการจับคู่สมบูรณ์และ A เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระในกราฟ G แสดงว่า F_1 จะต้องจับคู่จุดแต่ละจุดใน $A-\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ จำนวน $|A|-k-1$ ไปยังจุดใน $\overline{N}_G(u)$ เพราะว่า M' เป็นการจับคู่ใหญ่สุดใน $G[\overline{N}_G(u)]$ จะได้ว่า $|A|-k-1 \geq |B|$ ดังนั้น $|A|-k-1 \geq |B| \geq |A|$ แสดงว่า $k=-1$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $k \geq 1$ เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น $|M'| \geq n+1$

ให้ M'' เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $G[\overline{N}_G(u)]$

ให้ $C = \overline{N}_G(u) - V(M'')$

ต่อไปจะพิจารณา $|C|$ โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีตามค่าของ k

กรณีที่ 1 k เป็นจำนวนคู่

โดยทฤษฎีบท 2.1.8(2) เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* (0,*n*)-*extendable*

ดังนั้น M'' สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G

เราจะได้ $|C| \geq |A|-1 \geq k+1$

กรณีที่ 2 k เป็นจำนวนคี่

โดยทฤษฎีบท 2.1.8(2) เราจะได้ว่า G เป็นกราฟ *strongly* (1,*n*)-*extendable*

ดังนั้น M' สามารถขยายเป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G-u$

เราจะได้ $|C| \geq |A| \geq k+2$

ให้ $\{v_1', v_2', \ldots, v_k'\} \subseteq C$

เราจะได้ $G-(V(M'') \cup \{v_1', v_2', \ldots, v_k'\})$ มีการจับคู่สมบูรณ์

ดังนั้น $$|C| - |\{v_1', v_2', \ldots, v_k'\}| \geq |A|-1$$

เพราะฉะนั้น $$|\overline{N}_G(u)| - 2n = |C| \geq |A|+k-1$$

ทำให้เราได้ว่า $\quad |\overline{N}_G(u)| \;\ge\; |A| + 2n + k - 1$

ดังนั้น $\quad p \;=\; |N_G(u)| + |\overline{N}_G(u)| + 1 \;\ge\; n + k + t + |A| + 2n + k - 1 + 1$

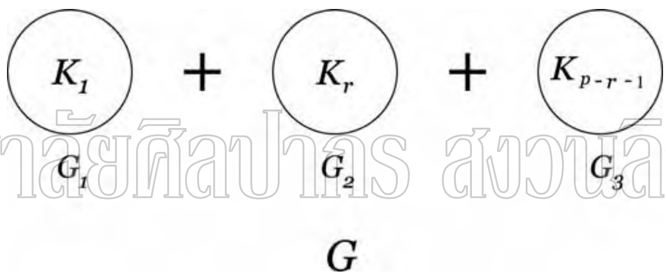
$$\ge\; n + k + t + n + k - t + 2 + 2n + k$$

$$=\; 4n + 3k + 2 \qquad \square$$

ทฤษฎีบทประกอบ 4.1.3 สำหรับแต่ละ n และ k ที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์โดยที่ $p \ge 2n + k + 2$ และ $p \equiv k (mod\ 2)$ จะมีกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดเท่ากับ r โดยที่ $2n + k + 1 \le r \le p - 1$

พิสูจน์ ให้ $G_1 = K_1$, $G_2 = K_r$ และ $G_3 = K_{p-r-1}$

เราจะได้ $G = G_1 \vee G_2 \vee G_3$ เป็นกราฟอันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดเท่ากับ r ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12

ต่อไปจะแสดงว่า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

ให้ $\qquad A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)$

กรณีที่ 1 $\quad V(G_1) \subseteq A$

เราจะได้ $\quad G - A \;=\; K_{p-2n-k}$

เนื่องจาก $p \equiv k (mod\ 2)$ ทำให้ได้ว่า $p - 2n - k$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $G - A$ มีการจับคู่สมบูรณ์

กรณีที่ 2 $V(G_1) \not\subseteq A$ นั่นคือ $V(G_1) \cap A = \varnothing$

ให้ $s = |A \cap V(G_2)|$

เราจะได้

$$G - A = K_1 \vee K_{r-s} \vee K_{p-r-1-(2n+k-s)}$$

เพราะว่า $r \geq 2n + k + 1 > s$ และ $p - r - 1 \geq 2n + k - s$

ทำให้เราได้ว่า $r - s \geq 1$ และ $p - r - 1 - (2n + k - s) \geq 0$

ให้ $x \in V(G_1)$ และ $y \in V(G_2)$

เราจะได้

$$G - (A \cup \{x, y\}) = K_{p-r-1-(2n+k-s)+r-s-1} = K_{p-2n-k-2}$$

ดังนั้นมี M เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - (A \cup \{x, y\})$

ทำให้เราได้ว่า $M \cup \{xy\}$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - A$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 4.1.4 สำหรับแต่ละ p , n และ k ที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ซึ่ง $p \geq 4n + 3k + 2$ และ $p \equiv k (mod\ 2)$ จะมีกราฟ *strongly* (*k*,*n*)*-extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดคือ r โดยที่ $n + k + 1 \leq r \leq 2n + k$

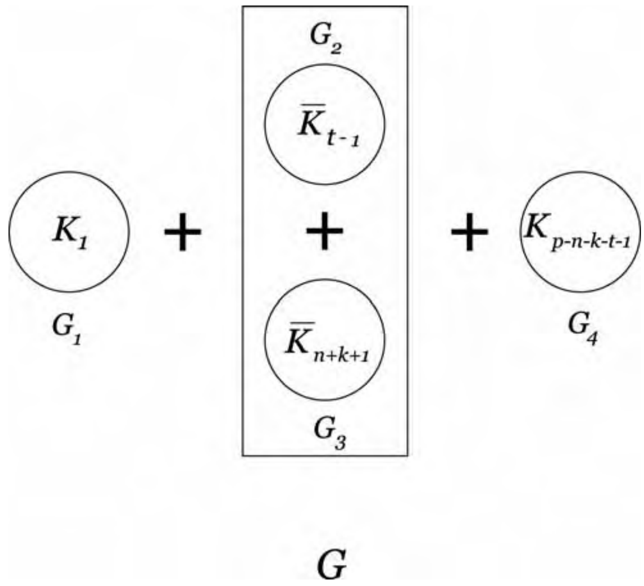
พิสูจน์ ให้ $r = n + k + t$ โดยที่ $1 \leq t \leq n$

และให้ $G_1 = K_1$, $G_2 = \overline{K}_{t-1}$, $G_3 = \overline{K}_{n+k+1}$ และ $G_4 = K_{p-n-k-t-1}$

พิจารณากราฟ

$$G = G_1 \vee (G_2 \vee G_3) \vee G_4$$

เราจะเขียนกราฟ G ได้ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13

จะเห็นว่า G เป็นกราฟอันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดคือ $n+k+t$

ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด n ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เราจะแสดงว่า $G' = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$ มีการจับคู่สมบูรณ์

ให้ $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)$

$$a_1 = |V(G_1) \cap A|$$

$$a_2 = |V(G_2) \cap A|$$

$$a_3 = |V(G_3) \cap A|$$

และ $a_4 = |V(G_4) \cap A|$

เราจะเห็นว่า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = |A| = 2n + k$ และ $a_1 \in \{0, 1\}$

กรณีที่ 1 $a_1 = 1$

เราจะได้ $G' = (\overline{K}_{t-1-a_2} \vee \overline{K}_{n+k+1-a_3}) \vee K_{p-n-k-t-1-a_4}$

ให้ M_1 เป็นการจับคู่ใหญ่สุดในกราฟ $(\overline{K}_{t-1-a_2} \vee \overline{K}_{n+k+1-a_3})$

ดังนั้น $|M_1| = min\{t-1-a_2, n+k+1-a_3\}$

ให้ $B = (\overline{K}_{t-1-a_2} \vee \overline{K}_{n+k+1-a_3}) - V(M_1)$

เราจะได้ $\nu(B) = n+k+t-(a_2+a_3+2|M_1|)$

$$= \begin{cases} n+k-t+a_2-a_3+2 & , |M_1| = t-1-a_2 \\ t+a_3-n-k-a_2-2 & , |M_1| = n+k+1-a_3 \end{cases}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\nu(K_{p-n-k-t-1-a_4}) - \nu(B) &= p-n-k-t-1-a_4-\nu(B) \\
&= p-n-k-t-1+1+a_2+a_3-2n-k-\nu(B) \\
&= p-3n-2k-t+a_2+a_3-\nu(B) \\
&= \begin{cases} p-4n-3k-2+2a_3 \geq 0 & , |M_1| = t-1-a_2 \\ p-2n-k-2t+2a_2+2 \geq 4 & , |M_1| = n+k+1-a_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

ให้ $M_2 = \{ab \mid a \in V(K_{p-n-k-t-1-a_4})$ และ $b \in V(B)\}$ โดยที่ M_2 เป็นการจับคู่ใหญ่สุด

เราจะเห็นว่า

$$K_{p-n-k-t-1-a_4} - V(M_2) = \begin{cases} K_{p-4n-3k-2+2a_3} & , |M_1| = t-1-a_2 \\ K_{p-2n-k-2t+2a_2+2} & , |M_1| = n+k+1-a_3 \end{cases}$$

เนื่องจาก $p \equiv k(mod\ 2)$ เราจะได้ $p-4n-3k-2+2a_3$ เป็นจำนวนคู่ และ $p-2n-k-2t+2a_2+2$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $K_{p-n-k-t-1-a_4} - V(M_2)$ มีการจับคู่สมบูรณ์

ให้ M_3 เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $K_{p-n-k-t-1-a_4} - V(M_2)$

เราจะได้ว่า $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G'

กรณีที่ 2 $a_1 = 0$

เนื่องจาก $V(G_3)$ เป็นเซตของจุดที่เป็นอิสระ ดังนั้น $V(G_3) - A \neq \varnothing$

ให้ $xy \in E(G')$ โดยที่ $x \in V(G_1)$ และ $y \in V(G_3) - A$

จากนั้นให้

$$G'' = G' - \{x, y\}$$

เราจะได้ $G'' = (\overline{K}_{t-1-a_2} \vee \overline{K}_{n+k-a_3}) \vee K_{p-n-k-t-1-a_4}$

ให้ M_1 เป็นการจับคู่ใหญ่สุดในกราฟ $(\overline{K}_{t-1-a_2} \vee \overline{K}_{n+k-a_3})$

ดังนั้น $|M_1| = min\{t-1-a_2, n+k-a_3\}$

ให้ $B = (\overline{K}_{t-1-a_2} \vee \overline{K}_{n+k-a_3}) - V(M_1)$

เราจะได้ $\nu(B) = n+k+t-1-(a_2+a_3+2|M_1|)$

$$= \begin{cases} n+k-t+a_2-a_3+1 & , \ |M_1| = t-1-a_2 \\ t+a_3-n-k-a_2-1 & , \ |M_1| = n+k-a_3 \end{cases}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \nu(K_{p-n-k-t-1-a_4}) - \nu(B) &= p-n-k-t-1-a_4-\nu(B) \\ &= p-n-k-t-1+a_2+a_3-2n-k-\nu(B) \\ &= p-3n-2k-t+a_2+a_3-\nu(B)-1 \\ &= \begin{cases} p-4n-3k-2+2a_3 \geq 0 & , \ |M_1| = t-1-a_2 \\ p-2n-k-2t+2a_2 \geq 2 & , \ |M_1| = n+k-a_3 \end{cases} \end{aligned}$$

ให้ $M_2 = \{ab | a \in V(K_{p-n-k-t-1-a_4})$ และ $b \in V(B)\}$ โดยที่ M_2 เป็นการจับคู่ใหญ่สุด เราจะเห็นว่า

$$K_{p-n-k-t-1-a_4} - V(M_2) = \begin{cases} K_{p-4n-3k-2+2a_3} & , \ |M_1| = t-1-a_2 \\ K_{p-2n-k-2t+2a_2} & , \ |M_1| = n+k-a_3 \end{cases}$$

เนื่องจาก $p \equiv k (mod\ 2)$ เราจะได้ $p-4n-3k-2+2a_3$ เป็นจำนวนคู่ และ $p-2n-k-2t+2a_2$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $K_{p-n-k-t-1-a_4} - V(M_2)$ มีการจับคู่สมบูรณ์

ให้ M_3 เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $K_{p-n-k-t-1-a_4} - V(M_2)$

เราจะได้ว่า $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \{xy\}$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ G' □

ให้ G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดคือ r โดยทฤษฎีบท 2.1.8(8) และทฤษฎีบท 4.1.2 จะสังเกตเห็นว่า

$$r \in \begin{cases} [n+k+1\,,\,p-1] & ,\ p \geq 4n+3k+2 \\ [2n+k+1\,,\,p-1] & ,\ p \leq 4n+3k+1 \end{cases} \qquad \ldots (4.1)$$

โดยผลของทฤษฎีบทประกอบ 4.1.3 และ 4.1.4 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.5 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ p, n และ k โดยที่ $p \geq 2n+k+2$ และ $p \equiv k(mod\ 2)$ จะมีกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p ซึ่งมีดีกรีที่น้อยที่สุดคือ r เมื่อ r สอดคล้องกับ (4.1) □

ทฤษฎีบท 4.1.6 ให้ G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p โดยที่ $n \geq 1$ และ $k \geq 1$ ถ้า $p \leq 4n+2k+2$ แล้ว G เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly (k,n)-extendable* อันดับ p โดยที่ $n \geq 1$ และ $k \geq 1$ เนื่องจาก $p \leq 4n+2k+2 < 4n+3k+2$ และโดยผลของทฤษฎีบท 4.1.2 และทฤษฎีบท 2.1.8(8) เราจะได้ $\delta(G) \geq 2n+k+1$ ดังนั้น

$$\delta(G) \geq 2n+k+1 = \frac{4n+2k+2}{2} \geq \frac{p}{2}$$

โดยผลทฤษฎีบท 1.2.2 เราจะได้ G เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน □

4.2 ผลกระทบต่อกราฟ *strongly (k,n)-extendable* เมื่อเพิ่มเส้นหรือกำจัดเส้น

G. Liu และ *Q. Yu* [21] ได้ศึกษาผลกระทบต่อกราฟ *strongly (k,n)-extendable* เมื่อเพิ่มเส้นใดๆ หรือกำจัดเส้นใดๆ จำนวน 1 เส้นซึ่งแสดงไว้ในทฤษฎีบท 2.1.9(1) , 2.1.9(2), 2.1.9(3) และ 2.1.9(4) และจากการศึกษาของท่านทั้งสอง ทำให้เราได้ว่าเมื่อกำจัดเส้นใดๆ จำนวน 2 เส้นจากกราฟ *strongly (k,n)-extendable* แล้วเราจะได้กราฟ *strongly (k-4,n)-extendable* และกราฟ *strongly (k,n-2)-extendable* และเมื่อเพิ่มเส้นใดๆ จำนวน 2 เส้นแล้วเราจะได้กราฟ *strongly (k-4,n)-extendable* และกราฟ *strongly (k,n-2)-extendable* ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาลักษณะของเส้นซึ่งเมื่อกำจัดเส้นจำนวน 2 เส้นแล้วเราจะได้กราฟ *strongly (k-2,n)-extendable* และกราฟ *strongly (k,n-1)-extendable* และเมื่อเพิ่มเส้นเป็นจำนวน 2 เส้นแล้วเราจะได้กราฟ *strongly (k-2,n)-extendable* และกราฟ *strongly (k,n-1)-extendable* นั่นคือเราจะ

ศึกษาลักษณะของเส้นซึ่งเมื่อเพิ่มเส้นหรือกำจัดเส้นจำนวน 2 เส้น แล้วทำให้กราฟที่ได้มีผลกระทบเหมือนกับผลกระทบที่ได้จากการเพิ่มเส้นใดๆ หรือกำจัดเส้นใดๆ จำนวน 1 เส้นจากกราฟ *strongly* (*k*,*n*)*-extendable*

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้า G เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)*-extendable* โดยที่ $n \geq 1$ และ $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq E(G)$ ซึ่ง $\{e_1, e_2\}$ เป็นเซตของเส้นที่เป็นอิสระ และ $G[\{e_1, e_2, e_3\}]$ เป็นวิถี แล้ว $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*-1)–*extendable*

พิสูจน์ ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(G - e_1 - e_2)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด $n-1$ ในกราฟ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

กรณีที่ 1 e_3 ตกกระทบกับจุดใน $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

ให้ $e_3 = xy$ โดยที่ x ตกกระทบกับ e_1 และ y ตกกระทบกับ e_2

กรณี 1.1 $x \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ และ $y \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เราจะได้

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)*-extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.8(2)

เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เพราะฉะนั้น $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*-1)*-extendable*

กรณี 1.2 $x \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ แต่ $y \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

เราจะได้

$$(G - e_1 - e_2) - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = (G - e_1) - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = (G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) - e_1$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)*-extendable*

เราจะได้ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ *n-extendable*
โดยทฤษฎีบท 2.1.3 เราจะได้ $(G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) - e_1$ เป็นกราฟ (*n*-1)-*extendable*
ดังนั้น $(G - e_1 - e_2) - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ (*n*-1)-*extendable*
นั่นคือ $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*-1)-*extendable*

กรณี 1.3 $y \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ แต่ $x \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
สามารถพิจารณาได้ทำนองเดียวกันกับกรณี 1.2 ทำให้เราได้ว่า $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*-1)-*extendable*

กรณีที่ 2 e_3 ไม่ตกกระทบกับจุดใน $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
กรณี 2.1 $e_3 \in M$ เราจะได้

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)-*extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.8(2)

เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
นั่นคือ $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*-1)-*extendable*

กรณี 2.2 e_3 ประชิดกับเส้นใน M โดยที่ e_1 และ e_2 ประชิดกับเส้นใน M เราจะได้

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)-*extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.8(2)
จะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

ทำให้เราได้ว่า $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*-1)-*extendable*

กรณี 2.3 e_3 ประชิดกับเส้นใน M โดยที่ e_1 หรือ e_2 ไม่ประชิดกับเส้นใน M

ให้ e_1 ไม่ประชิดกับเส้นใน M แต่ e_3 ประชิดกับเส้นใน M เพราะฉะนั้น e_2 ต้องประชิดกับเส้นใน M เราจะได้

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G - e_1 - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.9(4)

เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - e_1 - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

ทำให้เราได้ว่า $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* $(k,n\text{-}1)$*-extendable*

กรณี 2.4 e_3 ไม่ประชิดกับเส้นใน M เราจะได้

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M \cup \{e_3\})) = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M \cup \{e_3\}))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable*

เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup (V(M) \cup \{e_3\}))$$

ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M \cup \{e_3\}))$$

ทำให้เราได้ว่า $M' \cup \{e_3\}$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$(G - e_1 - e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

ดังนั้น $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* $(k,n\text{-}1)$*-extendable* □

ทฤษฎีบท 4.2.2 ถ้า G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* โดยที่ $k \geq 2$ และ $n \geq 1$ และ ถ้า $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq E(G)$ ซึ่ง $\{e_1, e_2\}$ เป็นเซตของเส้นที่เป็นอิสระ และ $G[\{e_1, e_2, e_3\}]$ เป็นวิถี แล้ว $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* $(k\text{-}2,n)$*–extendable*

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)*-extendable* โดยที่ $k \geq 2$

และ $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq E(G)$ ซึ่ง e_3 ประชิดกับเส้น e_1 และ e_2

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* โดยที่ $k \geq 2$ และ โดยทฤษฎีบท 2.1.8(3) เราจะได้ G เป็นกราฟ *strongly* $(k\text{-}2,n+1)$-*extendable*
และโดยทฤษฎีบท 4.2.1 เราจะได้ $G - e_1 - e_2$ เป็นกราฟ *strongly* $(k\text{-}2,n)$–*extendable*

□

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* โดยที่ $n \geq 1$ และให้ $H = G + e_1 + e_2$ โดยที่ e_1 และ e_2 ไม่เป็นเส้นในกราฟ G ถ้า $\{e_1, e_2\}$ เป็นเซตของเส้นที่เป็นอิสระของ H และมี $e_3 \in E(H)$ ซึ่ง $H[\{e_1, e_2, e_3\}]$ เป็นวิถี แล้ว H เป็นกราฟ *strongly* $(k,n\text{-}1)$–*extendable*

พิสูจน์ ให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(H)$ และ M เป็นการจับคู่ขนาด $n - 1$ ในกราฟ

$$H - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

กรณีที่ 1 e_3 ตกกระทบกับจุดใน $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
ให้ $e_3 = xy$ โดยที่ x ตกกระทบกับ e_1 และ y ตกกระทบกับ e_2

กรณี 1.1 $x \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ และ $y \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เราจะได้

$$H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.8(2)
เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ

$$H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เพราะฉะนั้น H เป็นกราฟ *strongly* $(k,n\text{-}1)$-*extendable*

กรณี 1.2 $x \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ แต่ $y \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เราจะได้

$$H - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = (G + e_1) - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = (G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) + e_1$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable*

เราจะได้ $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ *n-extendable*
โดยทฤษฎีบท 2.1.4 เราจะได้ $(G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) + e_1$ เป็นกราฟ $(n$-1)-*extendable*
ดังนั้น $H - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ เป็นกราฟ $(n$-1)-*extendable*
นั่นคือ H กราฟ *strongly* $(k,n$-1)-*extendable*

กรณี 1.3 $y \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ แต่ $x \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
สามารถพิจารณาได้ทำนองเดียวกันกับกรณี 1.2 ทำให้เราได้ว่า H เป็นกราฟ *strongly* $(k,n$-1)-*extendable*

กรณีที่ 2 e_3 ไม่ตกกระทบกับจุดใน $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
กรณี 2.1 $e_3 \in M$ เราจะได้

$$H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.8(2)
เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ทำให้เราได้ว่า H เป็นกราฟ *strongly* $(k,n$-1)-*extendable*

กรณี 2.2 e_3 ประชิดกับเส้นใน M โดยที่ e_1 และ e_2 ประชิดกับเส้นใน M เราจะได้

$$H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (k,n)-*extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.8(2)
เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ทำให้เราได้ว่า H เป็นกราฟ *strongly* $(k,n$-1)-*extendable*

กรณี 2.3 e_3 ประชิดกับเส้นใน M โดยที่ e_1 หรือ e_2 ไม่ประชิดกับเส้นใน M
ให้ e_1 ไม่ประชิดกับเส้นใน M แต่ e_3 ประชิดกับเส้นใน M เพราะฉะนั้น e_2 ต้องประชิดกับเส้นใน M เราจะได้

$$H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M)) = G + e_1 - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (*k,n*)-*extendable* และโดยทฤษฎีบท 2.1.8(7)
เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G + e_1 - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ทำให้เราได้ว่า H เป็นกราฟ *strongly* (*k,n*-1)-*extendable*

กรณี 2.4 e_3 ไม่ประชิดกับเส้นใน M เราจะได้

$$H - (\{v_1, \ldots, v_k\} \cup V(M \cup \{e_3\})) = G - (\{v_1, \ldots, v_k\} \cup V(M \cup \{e_3\}))$$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (*k,n*)-*extendable*
เราจะมี M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $G - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M \cup \{e_3\}))$
ดังนั้น M' เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $H - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M \cup \{e_3\}))$
ทำให้เราได้ว่า $M' \cup \{e_3\}$ เป็นการจับคู่สมบูรณ์ในกราฟ $(G + e_1 + e_2) - (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cup V(M))$
ดังนั้น H เป็นกราฟ *strongly* (*k,n*-1)-*extendable* □

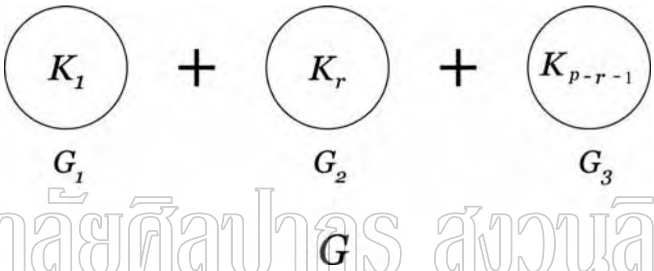
ทฤษฎีบท 4.2.4 ให้ G เป็นกราฟ *strongly* (*k,n*)-*extendable* โดยที่ $k \geq 2$ และ $n \geq 1$ และให้ $H = G + e_1 + e_2$ ซึ่ง e_1 และ e_2 ไม่เป็นเส้นในกราฟ G ถ้า $\{e_1, e_2\}$ เป็นเซตของเส้นที่เป็นอิสระ ของ H และมี $e_3 \in E(H)$ ซึ่ง $H[\{e_1, e_2, e_3\}]$ เป็นวิถี แล้ว H เป็นกราฟ *strongly* (*k*-2,*n*)–*extendable*

พิสูจน์ เนื่องจาก G เป็นกราฟ *strongly* (*k,n*)-*extendable* โดยที่ $k \geq 2$ และ
โดยทฤษฎีบท 2.1.8(5) เราจะได้ G เป็นกราฟ *strongly* (*k*-2,*n*+1)-*extendable*
โดยทฤษฎีบท 4.2.3 เราจะได้ H เป็นกราฟ *strongly* (*k*-2,*n*)–*extendable* □

บทที่ 5

ข้อเสนอแนะ

ให้ p, k, n และ r เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่ $2n + k + 3 \le r \le p - 1$ และ $p \ge 2n + k + 4$ ซึ่ง $p \equiv k (mod\ 2)$ โดยทฤษฎีบท 4.1.3 เราจะได้กราฟ $G = K_1 \vee K_r \vee K_{p-r-1}$ ดังในรูปต่อไปนี้เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)-*extendable*



รูปที่ 14

เราจะเห็นว่าเมื่อกำจัดจุดใดๆ ในกราฟ G จำนวน 2 จุดแล้วทำให้กราฟที่เหลือเป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)-*extendable* สิ่งที่น่าสนใจที่น่าจะศึกษาคือ จะมีกราฟซึ่งเป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)-*extendable* แต่เมื่อกำจัดจุดใดๆ จำนวน 2 จุดในกราฟ ทำให้กราฟที่เหลือไม่เป็นกราฟ *strongly* (*k*,*n*)-*extendable* หรือไม่ และถ้ามีกราฟดังกล่าวเราอาจจะศึกษาคุณสมบัติต่างๆ ของกราฟนี้ในแง่ของดีกรีที่น้อยที่สุด ในแง่ของค่าจุดเชื่อมโยง เป็นต้น รวมทั้งลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟนี้

บรรณานุกรม

[1] นวรัตน์ อนันต์ชื่น, ทฤษฎีกราฟ I, ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, นครปฐม (2540).

[2] *N. Ananchuen, On strongly k-extendable graphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 38 (2001) 3-19.

[3] *N. Ananchuen, On minimum degree of strongly k-extendable Graphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 38 (2001) 149-159.

[4] *N. Ananchuen and L. Caccetta, Matching extension and minimum degree, Discrete Mathematics* 170 (1997) 1-13.

[5] *N. Ananchuen and L. Caccetta, A note on k-extendable graphs and independence number, Australasian Journal of Combinatorics* 12 (1995) 59-65.

[6] *N. Ananchuen and L. Caccetta, On (n-2)-extendable graphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 16 (1994) 115-128.

[7] *N. Ananchuen and L. Caccetta, On minimally k-extendable graphs, Australasian Journal of Combinatorics* 9 (1994) 153-163.

[8] *N. Ananchuen and L. Caccetta, On critically k-extendable graphs, Australasian Journal of Combinatorics* 6 (1992) 39-65.

[9] *C. Chen, Matchings and matching extensions in graphs, Discrete Mathematics* 186 (1998) 95-103.

[10] *C. Chen, Binding number and toughness for matching extension, Discrete Mathematics* 146 (1995) 303-306.

[11] *H. Enomoto, M.D. Plummer and A. Saito, Neighborhood unions and factor critical graphs, Discrete Mathematics* 205 (1999) 217-220.

[12] *O. Favaron, Extendability and factor-criticality, Discrete Mathematics* 213 (2000) 115-122.

[13] *O. Favaron, On k-factor-critical graphs, Discussiones Mathematicae Graph Theory* 16 (1996) 1-11.

[14] *O. Favaron and M. Shi, Minimally k-factor-critical Graphs, Australasian Journal of Combinatorics* 17 (1998) 98-97.

[15] *O. Favaron and M. Shi, k-Factor-critical graphs and induced subgraphs, Congressus Numerantium* 122 (1996) 59-66.

[16] *E. Gyori and M.D. Plummer, The Cartesian product of a k-extendable and an l-extendable graph is (k+s+1)-extendable, Discrete Mathematics* 101 (1992) 87-96.

[17] *D.A. Holton, D. Lou and K.L. McAvaney, n-Extendability of line graphs, power graphs and total graphs, Australasian Journal of Combinatorics* 11 (1995) 215-222.

[18] *D.A. Holton and M.D. Plummer, Matching extension and connectivity in graph II, Combinatorics and Applications John Wiley&Sons, New York* (1988) 651-665.

[19] *K. Kawarabayashi , K. Ota and A. Saito, Hamiltonian cycles in n-factor-critical graphs, Discrete Mathematics* 240 (2001) 71-82.

[20] *C.H.C. Little, D.D. Grant and D.A. Holton, On defect-d matching in graphs, Discrete Mathematics* 13 (1975) 41-54.

[21] *G. Liu and Q. Yu, Generalization of matching extensions in graphs, Discrete Mathematics* 231 (2001) 311-320.

[22] *J. Liu and Q. Yu, Matching extensions and products of graphs, Discrete Mathematics* 55 (1993) 191-200.

[23] *D. Lou, Some conditions for n-extendable graphs, Australasian Journal of Combinatorics* 9 (1994) 123-136.

[24] *P. Maschlanka and L. Volkmann, Independence number in n-extendable graphs, Discrete Mathematics* 154 (1996) 167-178.

[25] *T. Nishimura, A closure concept in factor-critical graphs, Discrete Mathematics* 259 (2002) 319-324.

[26] *T. Nishimura, On* 1*-factors and matching extension, Discrete Mathematics* 222 (2000) 285-290.

[27] *M.D. Plummer, Extending matchings in claw-free graphs, Discrete Mathematics* 125 (1994) 301-307.

[28] *M.D. Plummer, Degree sums, neighborhood unions and matching extension in graphs, Contemporary Methods in Graph Theory , Ed.: R. Bodendiek, B.I. Wissenschafts-verlag, Mannheim/Wien/Zurich* (1990) 485 - 502.

[29] *M.D. Plummer, A theorem on matchings in the plane, Discrete Mathematics* 41 (1989) 347-354.

[30] *M.D. Plummer, Matching extension and connectivity in graphs, Congressus Numerantium* 63 (1988) 147-160.

[31] *M.D. Plummer, Toughness and matching extension in graphs, Discrete Mathematics* 72 (1988) 311-320.

[32] *M.D. Plummer, On n-extendable graphs, Discrete Mathematics* 31 (1980) 201-210.

[33] *M.D. Plummer and A. Saito, Closure and factor-critical graphs, Discrete Mathematics* 215 (2000) 171-179.

[34] *A. Saito, Research problem* 114, *Discrete Mathematics* 79 (1989) 109.

[35] *Q. Yu, Characterizations of various matching extensions in graphs, Australasian Journal of Combinatorics* 7 (1993) 55-64.

[36] *Q. Yu, Classifying 2-extendable generalized petersen in graphs, Discrete Mathematics* 103 (1992) 209-220.

[37] *Q. Yu, A note on n-extendable graphs, Journal of Graph Theory* 16 (1992) 349-353.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล	นายธรรมนูญ ผุยรอด
ที่อยู่	59 หมู่ 5 ต. บ้านหลวง อ. ดอนตูม จ. นครปฐม 73150

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2542	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
พ.ศ. 2543	ศึกษาต่อระดับปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร